

## ANÁLISE PROBABILÍSTICA E DE SENSIBILIDADE DE UMA MISTURA BETUMINOSA MODELADA POR ELEMENTOS FINITOS

Felipe Pulheis Rodrigues, [felipepulheis@hotmail.com](mailto:felipepulheis@hotmail.com)<sup>1</sup>  
Albert Willian Faria, [albert.faria@uftm.edu.br](mailto:albert.faria@uftm.edu.br)<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM, Av. Randolpho Borges Júnior, 2856 - Univerdecidade, Uberaba - MG, 38064-100,

**Resumo.** Este artigo aborda a modelagem numérica e probabilística de um corpo de prova cilíndrico de uma mistura betuminosa utilizando o Método dos Elementos Finitos e Simulação de Monte Carlo. Um modelo 2D é criado no ANSYS, usando axissimetria para a redução do custo computacional, e a Série de Prony para a modelar o comportamento viscoelástico da mistura. Incertezas na geometria e nas propriedades viscoelásticas da mistura são consideradas. O máximo deslocamento axial da amostra betuminosa submetida a uma pressão de compressão variável com o tempo é obtido, determinística e probabilisticamente, comparando com dados experimentais e numéricos da literatura. Os resultados numéricos determinísticos demonstram um erro percentual baixo (de 2,77 %) no valor do máximo deslocamento axial obtido ao final do carregamento quando comparado aos valores obtidos experimentais e numéricos da literatura. O modelo probabilístico revela o impacto das incertezas no máximo deslocamento vertical da mistura, enfatizando a relevância das propriedades viscoelásticas, especialmente o primeiro termo  $\alpha_1$  da Série de Prony, nessa resposta mecânica da mistura.

**Palavras chave:** Análise estocástica, Viscoelasticidade. Método dos elementos finitos. Mistura asfáltica betuminosa.

**Abstract.** This article addresses the numerical and probabilistic modeling of a cylindrical specimen of asphalt mixture using the Finite Element Method and Monte Carlo Simulation. A 2D model is created in ANSYS, employing axisymmetry to reduce computational costs, and the Prony Series to model the viscoelastic behavior of the mixture. Uncertainties in the geometry and viscoelastic properties of the mixture are considered. The maximum axial displacement of the asphalt sample under variable compressive pressure over time is obtained both deterministically and probabilistically, comparing with experimental and numerical data from the literature. Deterministic numerical results demonstrate a low percentage error (2.77%) in the maximum axial displacement compared to experimental and numerical values from the literature. The probabilistic model reveals the impact of uncertainties on the maximum vertical displacement of the mixture, emphasizing the importance of viscoelastic properties, especially the first term of the Prony Series ( $\alpha_1$ ), in this mechanical response of the mixture.

**Keywords:** Stochastic Analysis. Viscoelasticity. Finite Element Method. Asphaltic Bituminous Mixture.

### 1. INTRODUÇÃO

As incertezas, inerentes no projeto de qualquer sistema mecânico, podem ser incluídas em modelagens numéricas, como aquelas que utilizam o Método dos Elementos Finitos (MEF), resultando em modelagens numéricas probabilísticas ou estocásticas. A definição das funções de densidade de probabilidade das variáveis de entrada do modelo, a escolha da técnica de amostragem e o uso de geradores de número aleatórios necessários para a modelagem podem ser realizados através da Simulação de Monte Carlo (SMC). A SMC apresenta relativa facilidade de implementação computacional, capacidade de lidar com uma variedade de problemas complexos (lineares e não lineares) em diferentes áreas (como economia, medicina, astrofísica e engenharia) e a robustez de suas soluções. No entanto, um dos únicos fatores limitantes da SMC está relacionado ao tempo de processamento computacional necessário. Para reduzir o número necessário de amostragem, diversas técnicas matemáticas podem ser incorporadas à SMC. Dentre essas técnicas, a Amostragem por Hiper-cubo Latino (LHS, do inglês *Latin Hyper-cube Sampling*) é uma das mais comumente empregadas. Na amostragem LHS, o domínio de cada variável aleatória é subdividido em faixas amostradas uma única vez, o que resulta em uma distribuição esparsa e uniforme dos pontos no domínio, especialmente em problemas multidimensionais (BECK, 2019). Geralmente, a amostragem LHS utilizada em conjunto com a SMC requer entre 20 a 40 % menos interações de simulação, mantendo os mesmos níveis de precisão e acurácia (ALTABEY *et al.*, 2018).

Esse trabalho visa realizar a modelagem numérica, utilizando o MEF, um corpo de prova (CP) cilíndrico de uma mistura betuminosa, levando em conta as incertezas associadas às suas propriedades físicas e geometria. Dados experimentais de um ensaio de fluência e dados numéricos disponíveis na literatura são utilizados para validar e analisar os resultados. Além disso, a sensibilidade das variáveis de entrada (carga aplicada, geometria e propriedades mecânicas

do material) do modelo 2D implementando em relação à de saída (máximo deslocamento axial sofrido pela amostra ao final do ensaio) também é analisada nesse trabalho.

Misturas betuminosas, compostas geralmente por brita e betume, são frequentemente utilizadas como revestimento em pavimentos asfálticos. Essas misturas exibem comportamento viscoelástico que é influenciado pela temperatura e pela velocidade de tráfego. O betume, e, conseqüentemente a mistura asfáltica, demonstra ser mais rígido quando submetido a cargas mecânicas de curta duração, ou seja, de menor pulso, e menos rígido sob cargas de longa duração, de maior pulso (BERNUCCI *et al.*, 2022), sendo observado o efeito inverso em relação às cargas térmicas.

Nesse estudo, além de considerar as incertezas inerentes às variáveis de entrada do CP viscoelástico em questão, uma importante etapa do seu projeto mecânico é identificar as variáveis de entrada do modelo que mais influenciam suas respostas mecânicas. Essa análise será realizada utilizando a técnica de análise de sensibilidade.

## 2. METODOLOGIA

O corpo de prova betuminoso em estudo foi originalmente proposto no trabalho de Souza (2010) e posteriormente por de García *et al.* (2019). Ele consiste em um CP cilíndrico com diâmetro (D) de 102 mm e altura (H) de 64 mm, conforme ilustrado na Figura 1, em (a).

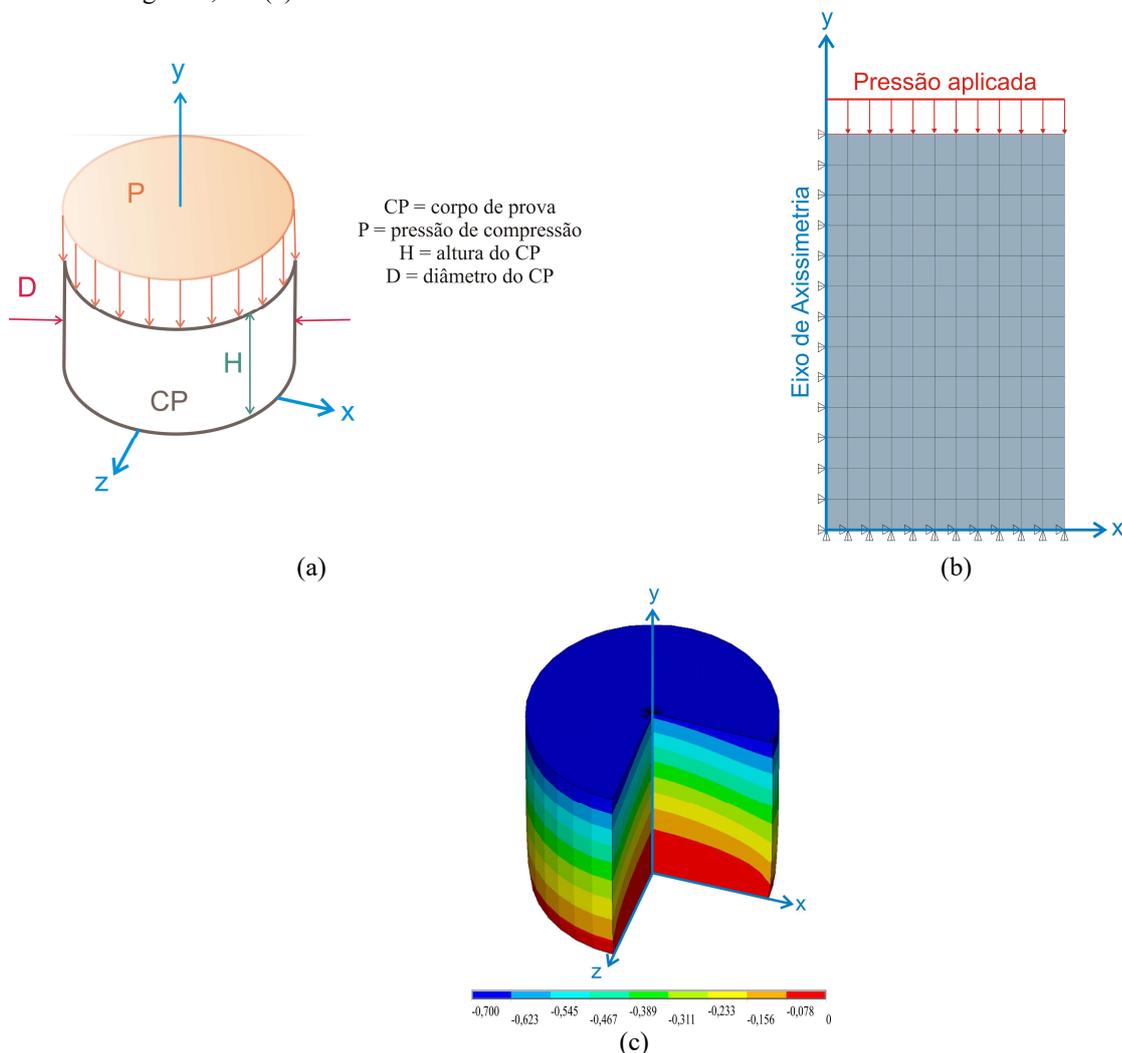


Figura 1. Corpo de prova de uma mistura betuminosa (a) e modelo numérico 2D implementado com condições de contorno e carregamento aplicados (b) e deslocamentos axiais determinísticos obtidos ao final da simulação.

O ensaio de fluência ( $D(t)$ ), realizado por Souza (2010), envolve a aplicação de uma pré-carga de compressão de 0,005 MPa (5 % de P) durante 10 s no CP, seguida por uma carga de compressão P de 0,1 MPa por mais 1 h (3600 s). Durante todo o período de ensaio (3610 s), a variação do máximo deslocamento axial do CP é monitorada, com a temperatura mantida constante a 25°C.

Nesse trabalho numérico, essa P é aplicada em incrementos ( $\Delta t$ ) de tempo fixo de 10 s até o tempo final de ensaio, adotado para levar em conta o carregamento inicial. Já, os parâmetros da Série de Prony são obtidos do trabalho numérico

de García *et al.* (2019), que, por meio do *software* VISCOLab e dados experimentais de Souza (2010), obteve os parâmetros do módulo de relaxação  $E(t)$  do material betuminoso fornecidos na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros adotados da Série de Prony para a mistura asfáltica CAP 50-70 (García *et al.*, 2019).

		$\rho_i$	$E_i$	$a_i$
$E_\infty$	7,07 MPa	1	175,24	0,875762
$\alpha_\infty$	0,035332	10	10,32	0,051574
$E_0$	200,10 MPa	100	5,91	0,029535
		1000	1,56	0,007796

O CP betuminoso em estudo possui densidade de 1100 kg/m<sup>3</sup> e um coeficiente de Poisson ( $\mu$ ) de 0,30. Trata-se de uma mistura de Cimento Asfáltico de Petróleo (CAP) do tipo 50-70 (CAP 50-70). Além disso, foram adicionadas 4 % de fibras sintéticas de aramida à composição para reforço mecânico da matriz da mistura asfáltica estudada.

O modelo numérico 2D implementado via MEF nesse trabalho, ilustrado na Figura 1, em (b), o princípio da axissimetria foi empregado para reduzir o tempo de processamento computacional, especialmente necessário na análise probabilística planejada.

Foi utilizado um elemento quadrático do tipo plano, denominado Plane182 no ANSYS, composto por quatro nós e dois graus de liberdade de translação (gdl) por nó ( $u_x$  e  $u_y$ ). O modelo numérico ilustrado na Figura 1, em (b), apresenta 672 gdl. Foram aplicadas as seguintes condições de contorno: impedimento dos deslocamentos na direção do eixo x ( $u_y = 0$ ) e imposição do eixo y de axissimetria ( $u_x = 0$ ), conforme ilustrado na Figura 1, em (b).

Foi realizada uma análise da convergência de malha em relação ao valor do máximo deslocamento axial ( $\rho_{\max}$ ) sofrido pelo modelo do CP ao final do tempo de aplicação do carregamento P. Além dos dados experimentais de Souza (2010) relacionados ao máximo deslocamento axial sofrido pela amostra em função do tempo de aplicação da carga, este estudo também utiliza os dados numéricos de García *et al.* (2019), os quais foram obtidos por meio do software ABAQUS na modelagem determinística do CP.

A natureza viscoelástica do material betuminoso pode ser aproximada, no domínio do tempo, por meio de uma Série de Prony (modelo generalizado de Maxwell). Essa série é usada para expressar o módulo de relaxação  $E(t)$  do material betuminoso como uma soma de termos exponenciais decrescentes, conforme indicado na Equação (1).

$$E(t) = E_0 \left( \alpha_\infty + \sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i e^{-t/\tau_i} \right) \quad (1)$$

sendo:  $E_0$  o módulo de relaxação inicial da mistura,  $\alpha_\infty$  e  $\alpha_i$  termos dependentes da Série Prony e  $\tau_i$  representa os tempos de relaxação característicos de cada termo da série. Os dois primeiros podem ser calculados através das expressões:

$$E_0 = E_\infty + \sum_{i=1}^{n_i} E_i \quad \alpha_i = E_i / E_0 \quad (2)$$

O módulo de relaxação  $E(t)$ , descreve como a tensão em um material viscoelástico decai ao longo do tempo sob uma deformação constante, refletindo a variação temporal da rigidez. Enquanto o módulo de elasticidade é independente do tempo e usado para materiais elásticos, o módulo de relaxação é dependente do tempo e específico para materiais viscoelásticos.

Uma das dificuldades da modelagem probabilística reside na estimativa das estatísticas associadas às variáveis probabilísticas do projeto. Nesse trabalho adotou-se uma variação de 1% para todos os parâmetros do vetor de variáveis X de entrada do modelo ( $E_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \mu, D, H$ ), independentemente do tipo de Função de Densidade de Probabilidade (FDP) adotado. Quanto às FDP utilizadas para a distribuição de uma variável aleatória X, foram empregadas a gaussiana e a uniforme, sendo estas aplicadas somente para as propriedades geométricas (D, H).

Na simulação probabilística, o número de amostras foi ajustado continuamente até a verificação da convergência dos resultados estatísticos. Nesse trabalho, foram adotadas 2000 amostras na SMC. Além disso, os resultados probabilísticos discutidos a seguir são obtidos a partir da solução dinâmica do modelo do CP da mistura betuminosa no instante de tempo 3610 s, utilizando um incremento de tempo igual a 10 s.

Esse estudo emprega o Coeficiente de Correlação de Pearson (do inglês: *Rank Correlation*), pois já está implementado na plataforma de modelagem utilizada, para a análise de sensibilidade das variáveis X de projeto. Esse coeficiente é uma estatística que relaciona as variáveis de entrada do modelo com as variáveis de saída, sendo obtido a partir dos dados da amostragem através do cálculo do parâmetro populacional r, que varia entre -1 e +1. Um valor -1 indica correlação

negativa, 1 indica correlação positiva e 0 indicando a falta de correlação. A sua formulação pode ser consultada em Frey e Patil (2002). Geralmente, as variáveis de entrada do modelo probabilístico são consideradas insignificativas quando apresentam correlações entre -0,1 e 0,1.

### 3. RESULTADOS

A Tabela 2, apresenta o máximo deslocamento ao longo do eixo axial  $y$  ( $\rho_{\text{máx}}$ ) do CP da mistura asfáltica no instante de tempo 3010 s, empregando os dados experimentais de Souza (2010), o modelo numérico determinístico de García *et al.* (2019) e os modelos numérico, determinístico e probabilístico, desenvolvidos nesse trabalho. A diferença percentual entre esses modelos determinísticos e o resultado experimental, empregando como referência, também é apresentada. Além disso, essa tabela informa para o modelo probabilístico os valores da média ( $\rho_{\text{médio}}$ ) e desvio padrão ( $\sigma$ ) do  $\rho_{\text{máx}}$ , empregando 95 % de confiança.

Tabela 2. Comparação dos valores do máximo deslocamento axial obtido entre métodos numéricos determinísticos e o experimental, além do valor probabilístico obtido.

Modelo	$\rho_{\text{máx}}$ (mm)	Diferença Percentual (%)	$\rho_{\text{médio}}$ (mm)	$\sigma$ (mm)
Experimental de Souza (2010)	0,720	-	-	-
Numérico de García <i>et al.</i> (2019)	0,757	5,14	-	-
Numérico Determinístico (deste trabalho)	0,700	2,78	-	-
Numérico Probabilístico (deste trabalho)	-	-	0,752	0,241

Os resultados numéricos determinísticos obtidos são mais semelhantes aos experimentais de Souza (2010) do que os obtidos por García *et al.* (2019). Ao comparar os dados, observa-se uma pequena discrepância percentual de 2,78 % ao empregar o presente modelo numérico determinístico em relação ao experimental, que é menor do que o percentual obtido por García *et al.* (2019). Por outro lado, valor médio ( $\rho_{\text{médio}}$ ) obtido com o modelo probabilístico é próximo ao valor determinístico obtido por García *et al.* (2019).

A Figura 2, em (a), ilustra os valores de deslocamento axial conforme o número de amostras utilizadas na SMC, considerando um nível de confiança de 95 % e empregando o modelo probabilístico. Essa figura demonstra a convergência do valor médio da variável aleatória de saída  $\rho_{\text{máx}}$  conforme o aumento do número de amostras. Por sua vez, a Figura 5, em (b), ilustra o histograma do módulo  $E_0$  da mistura.

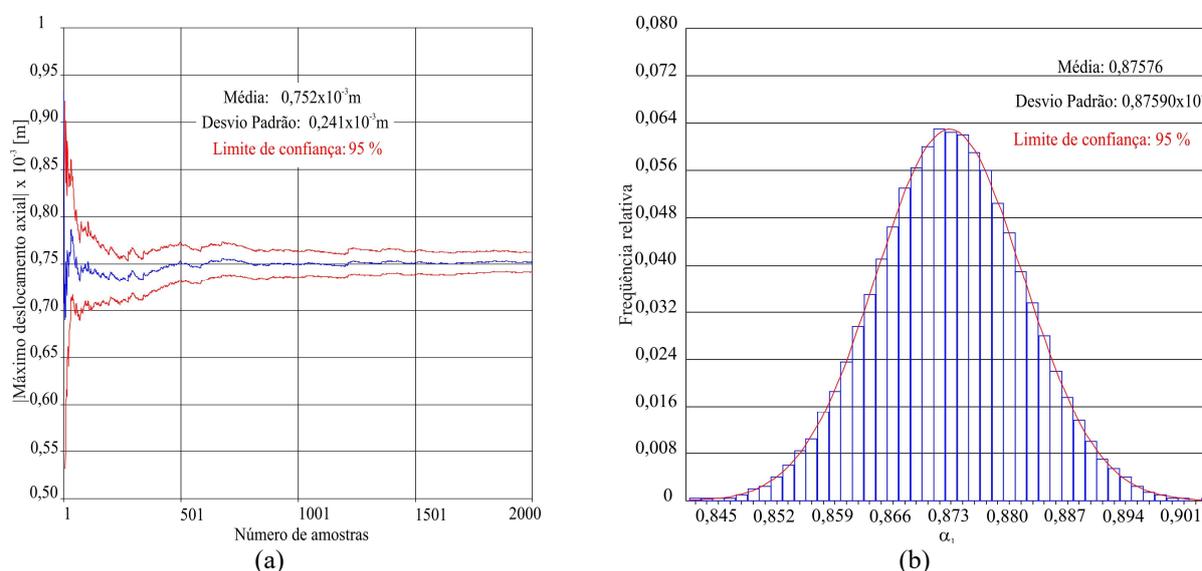


Figure 2. Histórico do valor da média da variável de saída  $\rho_{\text{máx}}$  (a) e histograma da variável de entrada  $E_0$  (b).

A Figura 3, em (a), ilustra a FDA da variável de saída  $\rho_{\text{máx}}$ , enquanto a mesma figura, em (b), ilustra a análise da sensibilidade empregando o Coeficientes de Correlação de Pearson, com um nível de significância de 2,5%.

Por meio da Figura 3, em (a), e no software utilizado na modelagem probabilística, pode-se afirmar com uma probabilidade de 95 % de que a variável  $\rho_{\text{máx}}$  seja menor que 1,167 mm, variando dentro do intervalo entre 1,127 mm e 1,215 mm. Além disso, há uma probabilidade de 54,363 % (variando entre 52,175 e 56,539 %) de que  $\rho_{\text{máx}}$  seja igual ao valor determinístico obtido experimentalmente de 0,720 mm.

Por meio da Figura 3, em (b), pode-se verificar que as variáveis mais significativas na modelagem da mistura, conforme estatísticas empregadas, são  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e H, sendo  $\alpha_1$  o parâmetro que mais influência no valor  $\rho_{\text{máx}}$ , e  $\alpha_2$  e H

apresentam praticamente a mesma sensibilidade. Também é possível constatar que o aumento dessas variáveis conduz o aumento do  $\rho_{\text{máx}}$ , enquanto as demais variáveis de projeto não apresentam sensibilidade relevante.

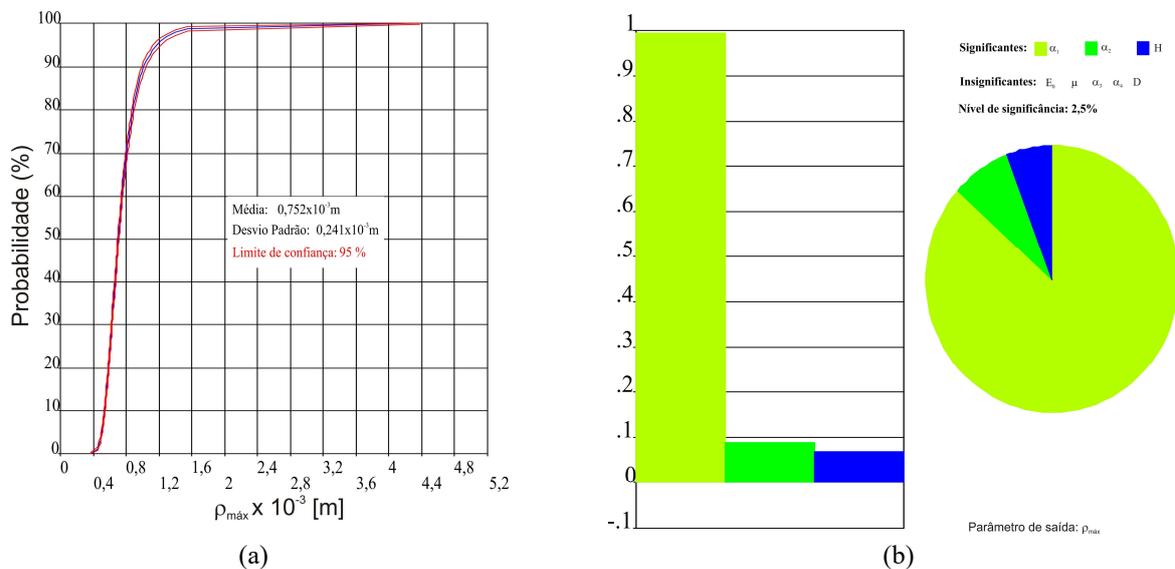


Figura 3. FDA do deslocamento axial máximo e a análise da sensibilidade dos parâmetros de entrada em relação a esse deslocamento.

Do desvio padrão obtido na análise probabilística, conforme apresentado na Tabela 2, e dos dados na análise da sensibilidade realizada, nota-se que uma pequena variação nas propriedades viscoelásticas da mistura, especialmente do  $\alpha_1$ , provoca uma grande variação em seu deslocamento axial máximo.

#### 4. CONCLUSÕES

Uma pequena diferença percentual de 2,77 % é observada entre o valor do máximo deslocamento axial determinístico sofrido no corpo de prova da mistura betuminosa (0,700 mm) em comparação ao dado de origem experimental obtido na literatura (0,720 mm). No entanto, o modelo que considera incertezas nas variáveis de entrada do material viscoelástico, nos parâmetros do módulo de relaxação e no coeficiente de Poisson do material betuminoso, bem como nas propriedades geométricas do corpo de prova cilíndrico (altura e diâmetro), resultou em um valor médio igual a 0,752 mm, com desvio padrão relativamente alto de 0,241mm. Através da análise de sensibilidade, pode-se observar que o valor do máximo deslocamento axial sofrido pela mistura asfáltica é muito dependente do valor do parâmetro  $\alpha_1$  empregado na Série de Prony, utilizada na formulação matemática do comportamento viscoelástico da mistura asfáltica.

#### 5. AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Pesquisa Científica pelo financiamento da bolsa de iniciação científica PIBITI-CNPq do discente.

#### 6. REFERÊNCIAS

- Altabey, W.A., Noori, M., Wang, L. 2018. *Using ANSYS for finite element analysis, Volume II: dynamic, probabilistic design and heat transfer analysis*. Momentum Press, New York.
- Beck, A.T. 2019. *Confiabilidade e segurança das estruturas*. Elsevier, Rio de Janeiro.
- Bernucci, L.B., Motta, L.M.G., Ceratti, J.A.P., Soares, J.B. 2022. *Pavimentação asfáltica: formação básica para engenheiros*. PETROBRAS ABEDA, Rio de Janeiro, 2ª edição.
- Frey, H.C. and Patil, S.R. 2002. "Identification and Review of Sensitivity Analysis Methods" *Risk Analysis*, Vol. 22, n. 3, p. 553-578.
- Garcia, L.M., Farias, M.M., Recarey, C.M. e Souza, M.V.R. 2019. "Estudo numérico das propriedades viscoelásticas no domínio do tempo em misturas asfálticas do tipo CPA" *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*, Vol. 5, p. 148-157.
- Souza, M.V.R., 2010. *Efeito de fibras sintéticas nas propriedades de ligantes e concretos asfálticos*. Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília, Brasília.

#### 7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.