

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS APLICADAS À ENGENHARIA MECÂNICA

Luís Otávio de Oliveira Alvarenga, d202110741@uftm.edu.br¹
Nelson Fernando Inforzato, nelson.inforzato@uftm.edu.br²

^{1, 2}Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Av. Randolpho Borges Júnior, 1400 – Univerdecidade, Uberaba -MG

Resumo. O trabalho oferece uma abordagem teórica dos métodos numéricos aplicados à solução de equações diferenciais parciais (EDPs). Em um primeiro momento realiza-se uma revisão das séries de Taylor e sua implementação na diferenciação numérica, destacando o Método das Diferenças Finitas como uma técnica para aproximar derivadas, neste caso, de primeira e segunda ordem. Em seguida, explora-se a solução de EDPs de segunda ordem, como a equação de Laplace, equação unidimensional da onda e equação da difusão, através do Método das Diferenças Finitas. São analisados exemplos práticos, incluindo a determinação da distribuição de temperatura em placas quadradas em regime permanente além da evolução temporal da temperatura em regimes transientes. O estudo enfatiza a relevância e aplicabilidade dos métodos numéricos na solução de problemas de engenharia e física.

Palavras chave: Numérico. Difusão. Laplace. Derivadas. Engenharia.

Abstract. This work presents a theoretical approach to numerical methods applied to the solution of partial differential equations (PDEs). Initially, a review of Taylor series and its implementation in numerical differentiation is conducted, highlighting the Finite Difference Method as a technique to approximate derivatives, in this case, first and second order. Subsequently, the solution of second-order PDEs such as Laplace's equation, the one-dimensional wave equation, and the diffusion equation is explored through the Finite Difference Method. Practical examples are analyzed, including the determination of temperature distribution in square plates under steady-state conditions and the temporal evolution of temperature in transient regimes. The study emphasizes the relevance and applicability of numerical methods in solving engineering and physics problems.

Keywords: Numerical. Diffusion. Laplace. Derivatives. Engineering.

1. INTRODUÇÃO

Segundo Cristina e Cunha (2003) a maioria dos fenômenos físicos é modelada matematicamente por meio de equações, ou sistema de equações, que envolvem derivadas parciais da função incógnita. Considerando que a solução analítica de muitos problemas de derivadas parciais é restrita a geometrias e condições de contorno simples (Berman, 2014), o uso de métodos numéricos se torna indispensável para estudo de diversos fenômenos.

Para dar início ao estudo de métodos numéricos para resolução de Equações de Derivadas Parciais (EDP's) é necessário, primeiramente, lembrar o desenvolvimento em séries de Taylor abordado por Stewart (2009). Assim, considere esse desenvolvimento em torno de a , Eq. (1).

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a) \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + R_{n+1} \quad (1)$$

onde f é uma função que possui derivadas de todas as ordens e (1) uma série convergente em algum intervalo $|x-a| < R \in R$. Como (1) é convergente, é possível reescrever $f(x)$ como:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \quad (2)$$

ou seja, a partir da equação (2), pode-se afirmar que $f(x)$ é a soma de um polinômio de Taylor de grau n de f em a com o resto R da série de Taylor. Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de grau n de f em a e $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ para $|x-a| < R$, então $f(x)$ é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo $|x-a| < R$.

A partir deste desenvolvimento é possível aproximar funções (trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, etc.) por polinômios, facilitando alguns cálculos. Ademais, pode-se dizer também que se a função em questão possui derivadas contínuas de todas as ordens, a série converge e, desta forma, a série das derivadas também converge, possibilitando o uso para desenvolver métodos de diferenças finitas.

1.1. Método das diferenças finitas

Conhecido o desenvolvimento em séries de Taylor, é possível utilizar o método de Diferenças Finitas, método de resolução numérica que tem por base a aproximação de derivadas por fórmulas de diferenças finitas (Zill 2001), para solucionar Equações de Derivadas Parciais. Dentre as aplicações do método se encontra a solução da equação da onda, equação do calor unidimensional, equação de Laplace, equação da difusão e outras equações aplicadas à vibração, análise de temperatura e distribuição de tensão. Para obter as aproximações, considera-se $x = a + h$, onde $h > 0$, assim, da Eq. (1) obtêm-se a Eq. (3):

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \frac{(h)}{1!} + f''(a) \frac{(h)^2}{2!} + f'''(a) \frac{(h)^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(h)^n}{n!} \quad (3)$$

Para obter-se a aproximação para a derivada de primeira ordem, considera-se $f(a + h) = T_1(a) + R_n(x) = f(a) + f'(a) \frac{(h)}{1!} + R_n(a)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(a) = 0$, chega-se à aproximação para a primeira derivada, dada pela Eq. (4).

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (4)$$

De modo semelhante é possível obter aproximação para a derivada segunda por meio do desenvolvimento em séries de Taylor. Para isso, é considerado $x = a - h$, resultando na Eq. (5).

$$f(a - h) = f(a) + f'(a) \frac{(-h)}{1!} + f''(a) \frac{(-h)^2}{2!} + f'''(a) \frac{(-h)^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(-h)^n}{n!} \quad (5)$$

Agora é considerado $f(a - h) = T_2(a) + R_n(x) = f(a) + f'(a) \frac{(-h)}{1!} + f''(a) \frac{(-h)^2}{2!} + R_n(a)$. Seja $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(a) = 0$ e somando-se a Eq. (3) com a Eq. (5), chega-se na aproximação dada pela Eq. (6).

$$f''(a) = \frac{f(a - h) - 2f(a) + f(a + h)}{h^2} \quad (6)$$

A partir da Eq. (4) e Eq. (6) é possível aproximar o valor de equações de derivadas parciais de segunda ordem linear em duas variáveis independentes x e y , do tipo Eq. (7).

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (7)$$

onde A, B, \dots, G são funções de x e y , considerando o caso em que a série converge.

2. METODOLOGIA

A partir do método de substituição de derivadas por equações de diferenças finitas é possível solucionar qualquer tipo de EDP's. No estudo em questão, manteve-se o foco em EDP's de segunda ordem do tipo Eq. (7). Mais precisamente, serão abordadas: Equações elípticas, onde $B^2 - 4AC < 0$, Equações Hiperbólicas, onde $B^2 - 4AC > 0$ e Equações Parabólicas, onde $B^2 - 4AC = 0$.

2.1. Equações elípticas

O foco deste trabalho está em um caso específico, a equação de Laplace definida por $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Para substituir a equação de Laplace por uma equação de diferenças é necessário aplicar a Eq. (6) em duas variáveis, obtendo a aproximação dada pela Eq. (8).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x - h, y) + u(x, y - h) - 4u(x, y) + u(x + h, y) + u(x, y + h)}{h^2} = 0 \quad (8)$$

para simplificar a notação, Zill (2001) sugere adotar $u(x, y) = u_{i,j}$, $u(x - h, y) = u_{i-1,j}$, $u(x, y - h) = u_{i,j-1}$, $u(x + h, y) = u_{i+1,j}$, $u(x, y + h) = u_{i,j+1}$ de modo que a equação de Laplace possa ser reescrita como a Eq. (9).

$$u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} = 0 \quad (9)$$

Além da notação adotada, o autor sugere, para visualizar o significado da Eq. (9) que seja considerada uma malha formada por retas horizontais e verticais espaçadas de h unidades, colocada sobre uma região R com fronteira C , Fig. 1, onde procuramos uma solução da equação de Laplace. O número h é o tamanho da malha. Os pontos de intersecção das retas são denominados nós. Um ponto da malha é ponto interior se seus quatro vizinhos mais próximos são pontos pertencentes à R . Os pontos de R ou de C que não são pontos interiores são chamados pontos fronteira. (Zill 2005).

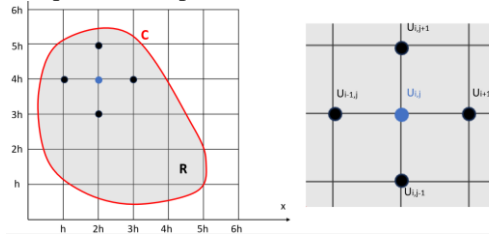


Figura 1. Malha formada por retas espaçadas por h unidades (Elaborada pelo autor)

A partir da Fig. 1, fica claro que o valor de um ponto $u_{i,j}$ dentro da região R em que se pretende obter a solução da equação de Laplace é a média dos pontos vizinhos uma vez que a partir da Eq. (9) chega-se à Eq. (10).

$$u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}}{4} \quad (10)$$

Assim, como todos os pontos estão correlacionados entre si, é possível utilizar a Eq. (10) para obter um sistema de equações algébricas lineares capaz de solucionar problemas em que há valores conhecidos em um contorno C e pretende-se obter os valores de pontos u_{ij} internos da região R .

2.1.1. Aplicação do método das diferenças finitas para solucionar a equação de Laplace

Tomando um problema de contorno onde há uma placa quadrada de lado 1 m em que a temperatura em suas bordas é conhecida, é possível obter a temperatura em seu interior em estado permanente. O problema de contorno em questão pode ser escrito pela Eq. (11)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \quad (11)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 1000y(1 - y), \quad 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 1000x(1 - x), \quad 0 < x < 1$$

Considerando $h = \frac{1}{3}$, obtêm-se quatro pontos interiores e oito pontos de fronteira, como pode ser visto na Fig. 2.

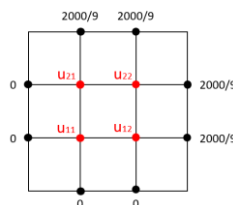


Figura 2. Malha formada com $h=1/3$ com pontos de fronteira em preto e pontos interiores em vermelho (Elaborada pelo autor)

Os números próximos à fronteira foram obtidos pelo valor exato de u a partir das condições de contorno impostas. Para encontrar o valor de u nos quatro pontos internos, utiliza-se a Eq. (10) em cada um dos pontos. Assim, obtêm-se:

$$u_{1,1} = \frac{u_{0,1} + u_{1,0} + u_{2,1} + u_{1,2}}{4} \quad u_{1,2} = \frac{u_{0,2} + u_{1,1} + u_{2,2} + u_{1,3}}{4}$$

$$u_{2,1} = \frac{u_{1,1} + u_{2,0} + u_{3,1} + u_{2,2}}{4} \quad u_{2,2} = \frac{u_{1,2} + u_{2,1} + u_{3,2} + u_{2,3}}{4}$$

que podem ser reescritos no seguinte sistema linear:

$$\begin{array}{cccccc} -4u_{11} & u_{12} & u_{21} & 0 & = & 0 \\ u_{11} & -4u_{12} & 0 & u_{22} & = & -2000/9 \\ u_{11} & 0 & -4u_{21} & u_{22} & = & -2000/9 \\ 0 & u_{12} & u_{21} & -4u_{22} & = & -4000/9 \end{array}$$

Resolvendo o sistema linear através do programa de linguagem computacional GNU Octave®, é possível obter as temperaturas nos quatro pontos interiores da malha:

$$u_{1,1} = \frac{1}{18} = 55,56 \quad u_{1,2} = \frac{1}{9} = 111,1 \quad u_{2,1} = \frac{1}{9} = 111,1 \quad u_{2,2} = \frac{1}{6} = 166,7$$

Considerando que para a aproximação por diferenças finitas da segunda derivada considera-se como resto $R_2(x)$ todas as parcelas do polinômio de Taylor após f'' , ou seja, $R_2(a-h) = f'''(a) \frac{(-h)^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(-h)^n}{n!}$, é esperado que valores menores de h resultem em uma maior precisão dos valores obtidos, uma vez que o resto desconsiderado na aproximação decai com a redução de h . Por outro lado, uma grande redução no valor de h implicará em grande quantidade de pontos interiores pertencentes à malha, tornando o sistema linear extenso, aumentando o custo computacional para solução. Para uma região quadrada de lado L como a considerada no exemplo, uma malha $h = L/n$ resultará em $(n-1)^2$ pontos interiores.

Tomando $h = 1/51$ no exemplo anterior, obtêm-se 2500 pontos interiores, o que torna o tempo de cálculo oneroso, porém melhora o resultado obtido. A representação gráfica dos resultados obtidos para $h = 1/3$ e $h = 1/51$ pode ser visualizada na Fig. 3a e Fig. 3b respectivamente.

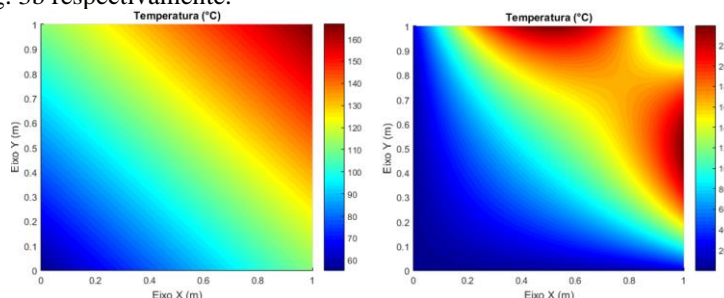


Figura 3. a) representação gráfica da temperatura dos pontos interiores para $h=1/3$ - b) representação gráfica da temperatura dos pontos interiores para $h=1/51$ (Elaborada pelo autor)

2.2. Equações hiperbólicas

Nesta seção será apresentado o método numérico das diferenças finitas para soluções de equações Hiperbólicas, mais precisamente, para a solução do problema de contorno da equação unidimensional da onda dada pela Eq. (12).

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0 \tag{12}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < a$$

O problema em questão admite solução única se as funções f e g possuem derivadas de segunda ordem contínuas no intervalo $(0, a)$ e se $f(0) = f(a) = 0$. Para substituir a equação da onda por uma equação de diferenças finitas é necessário, novamente, aplicar a Eq. (6) para duas variáveis, obtendo a aproximação dada pela Eq. (13).

$$\frac{a^2}{h^2} [u(x-h, t) - 2u(x, t) + u(x+h, t)] = \frac{1}{k^2} [u(x, t-k) - 2u(x, t) + u(x, t+k)] \tag{13}$$

para simplificar a notação, Zill (2005) sugere considerar $\lambda = \frac{ak}{h}$, de modo que a Eq. (13) possa ser reescrita como a Eq. (14).

$$u_{i,j+1} = \lambda^2 u_{i-1,j} + 2(1 - \lambda^2) u_{i,j} + \lambda^2 u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \tag{14}$$

Neste caso, deseja-se obter a solução aproximada do problema dado pela Eq. (12) em uma região retangular do plano xt definida por $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq t \leq T$, onde a pode ser interpretado como o comprimento de uma corda e T o instante de tempo avaliado.

De modo semelhante ao realizado para equações Elípticas, é possível considerar a malha formada por linhas verticais espaçadas de h unidades e por linhas horizontais espaçadas de k unidades de tempo. Ou seja, fixando naturais m e n , h e k podem ser obtidos através de uma relação com o tamanho da região retangular. Uma vez que $h = \frac{a}{n}$ e $k = \frac{T}{m}$.

Como pode ser visto na Eq. (14), a determinação da posição de um determinado ponto da corda em um instante de tempo $j+1$ é função da posição no instante de tempo j e $j-1$, o que gera um problema para o instante de tempo $t=0$, uma vez que o termo $u_{i,j-1}$ não existe.

Para solucionar o problema, é necessário utilizar a condição de contorno da velocidade inicial da onda ou corda. Neste caso, subtraindo as Eq. (3) e Eq. (5), é possível obter a aproximação por diferenças finitas dada pela Eq. (15).

$$f'(a) = \frac{1}{2h} [f(a+h) - f(a-h)] \quad (15)$$

Aplicando a Eq. (15) na condição inicial de velocidade, chega-se a Eq. (16):

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x) = \frac{1}{2k} [u_{i,j+1} - u_{i,j-1}] \quad (16)$$

Manipulando a Eq. (16), é possível substituir $u_{i,j-1} = u_{i,j+1} - 2kg(x)$, $j = 0$, na Eq. (14), solucionando o problema no instante de tempo $t = 0$. A partir de todas as substituições realizadas, calcula-se a posição de cada ponto interior da malha, por meio de sistemas lineares.

2.3. Equações parabólicas

Nesta seção será abordada a solução pelo método das diferenças finitas da equação do calor unidimensional dada por $c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$. Para substituir a equação do calor unidimensional por uma equação de diferenças é necessário aplicar as Eq. (4) e Eq. (6), obtendo a aproximação dada pela Eq. (17).

$$\frac{c}{h^2} [u(x-h, t) - 2u(x, t) + u(x+h, t)] = \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} \quad (17)$$

para simplificar a notação, considera-se novamente $\lambda = \frac{ck}{h^2}$, de modo que a Eq. (17) possa ser reescrita como a Eq. (18).

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j} \quad (18)$$

Ou seja, para um fio longo, considerado unidimensional, é possível afirmar, através da aproximação da equação do calor unidimensional, que a temperatura do fio em uma posição x do instante de tempo $t+k$ será dada em função do próprio ponto e de seus vizinhos mais próximos no instante de tempo t . Assim, conhecendo a temperatura de um fio num instante de tempo inicial, é possível prever pela Eq. (18) a temperatura do mesmo fio em instantes de tempo futuros.

A solução deste problema é semelhante ao já descrito para equações Elípticas e Hiperbólicas, sendo necessário resolver um sistema linear para obter as temperaturas do fio no instante de tempo necessário.

2.4. Equação da difusão térmica

Compreendido o uso do método das diferenças finitas na solução de equações elípticas, hiperbólicas e parabólicas, é possível aplica-lo a equações mais complexas, neste caso, à equação da difusão, ou equação do calor em regime transiente. Assim, nesta seção será desenvolvido um método numérico para resolução da Equação da difusão a partir dos conceitos abordados nas seções anteriores. A equação em questão exibe a evolução temporal da temperatura de uma placa plana e pode ser escrita pela Eq. (19).

$$\alpha \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (19)$$

onde α é o coeficiente de difusibilidade.

Segundo Bergman (2014), em análise de transferência de calor o coeficiente de difusibilidade α é dado como a razão entre a condutividade térmica e a capacidade térmica volumétrica do material $\alpha = k/\rho C_p$, ou seja, o coeficiente mede a capacidade do material conduzir energia térmica em relação à sua capacidade de armazená-la.

Para solucionar numericamente a equação da difusão aplicou-se novamente as Eq. (4) e Eq. (6), chegando as substituições dadas pela Eq. (20)

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_{i,j}^k \\ \Delta u &= \frac{u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k}{h^2} + \frac{u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k}{h^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} \end{aligned} \quad (20)$$

onde h é o tamanho da malha no plano XY e Δt é o passo de tempo (k nas seções anteriores). De modo que a Eq. (19) seja reescrita pela Eq. (21):

$$\alpha \left(\frac{u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k}{h^2} + \frac{u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k}{h^2} \right) = \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} \quad (21)$$

Multiplicando ambos os lados por Δt e isolando $u_{i,j}^{k+1}$, chega-se ao sistema linear dado pela Eq. (22)

$$u^{k+1} = Mu^k \tag{22}$$

A partir das Eq. (19) e (20) é possível afirmar que em uma placa quadrada de lado l , a temperatura de um ponto (x, y) em um instante de tempo $t + \Delta t$ será dada em função dos pontos (x, y) , $(x + h, y)$, $(x - h, y)$, $(x, y + h)$, $(x, y - h)$ no instante de tempo t .

Assim, a partir do resultado obtido para equação de Laplace, onde é conhecida a temperatura de todos os pontos interiores do domínio formado por uma placa quadrada de lado l é possível estimar as temperaturas de tais pontos nos instantes de tempo seguintes.

A solução numérica deste problema é semelhante à já descrita para equações Elípticas e Parabólicas, sendo necessário resolver o sistema linear para obter as temperaturas dos pontos interiores da placa no instante de tempo necessário. Para isso é necessário estipular o passo de tempo Δt , o tamanho da malha h e a temperatura inicial da placa através da solução numérica para equações Elípticas. A metodologia para resolução do sistema linear foi baseada na metodologia desenvolvida por Belussi, (2007). Neste caso, a solução do sistema se torna mais onerosa computacionalmente, uma vez que durante a solução de equações Elípticas utiliza-se matrizes quadradas de ordem $(n - 1)$, enquanto para resolver computacionalmente a equação da difusão, a matriz M deve ser de ordem $(n - 1)^2$.

3.RESULTADOS

Com o objetivo de se verificar o resultado obtidos pela aplicação do método de diferenças finitas na Equação de Laplace foi realizada uma simulação computacional por elementos finitos através do software Ansys®, utilizando a versão Ansys Student 2024 R1, disponibilizada gratuitamente.

A simulação foi realizada através do sistema de análise “Steady-State Termal” com as mesmas condições impostas no primeiro problema de contorno apresentado. A comparação gráfica entre o resultado obtido através da simulação pelo software Ansys® e resultado obtido pelo método numérico utilizando o software GNU Octave® pode ser vista nas Fig. 4a e Fig. 4b.

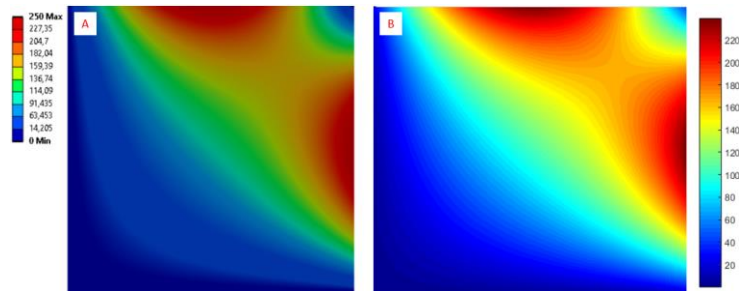


Figura 4. a) representação gráfica da temperatura da placa obtida pelo software Ansys® - b) representação gráfica da temperatura da placa obtida pelo software GNU Octave® (Elaborada pelo autor)

Além da análise gráfica, foram comparados os valores exatos da temperatura de cinco pontos aleatórios da placa em ambos os casos, como pode ser visto na Tab.1.

Tabela 1. Comparação da temperatura de 5 pontos aleatórios obtida por diferentes métodos (Elaborada pelo autor)

Coordenada X [m]	Coordenada Y [m]	Temperatura [°C] Ansys 24960 nós	Temperatura [°C] Método Numérico 2500 nós	Erro relativo [%]	Temperatura [°C] Método Numérico 24964 nós	Erro relativo [%]
0,6531	0,8367	179,04	176,3	1,53	178,3	0,41
0,5714	0,0612	17,29	21,37	-23,60	18,74	-8,39
0,1429	0,8184	68,57	73,91	-7,79	69,88	-1,91
0,2041	0,3878	35,04	37,42	-6,79	35,35	-0,88
0,8163	0,3469	141,9	141,4	0,35	142,7	-0,56

Para visualizar os resultados da aplicação do método das diferenças finitas para solucionar a equação da difusão térmica considerou-se um problema de contorno onde há uma placa quadrada de lado 1 m em que a temperatura em suas bordas é conhecida em um instante de tempo inicial, é possível obter a temperatura em seu interior em qualquer instante de tempo $t + k > 0$. O problema de contorno em questão pode ser escrito pela Eq. (23).

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0 \tag{23}$$

$$u(0, y, 0) = 0, \quad u(1, y, 0) = 1000y(1 - y), \quad 0 < y < 1$$

$$u(x, 0, 0) = 0, \quad u(x, 1, 0) = 1000x(1 - x), \quad 0 < x < 1$$

O problema de contorno em questão foi solucionado computacionalmente considerando uma placa de ferro puro com $\rho = 7870 \text{ kg/m}^3$, $C_p = 447 \text{ J/kgK}$, $k = 80,2 \text{ W/m K}$, $T = 240 \text{ s}$, $h = 1/159 \text{ m}$ e $\Delta t = 30 \text{ s}$ de modo que a representação gráfica dos valores obtidos pelo método de diferenças finitas pode ser vista na Fig. 5.

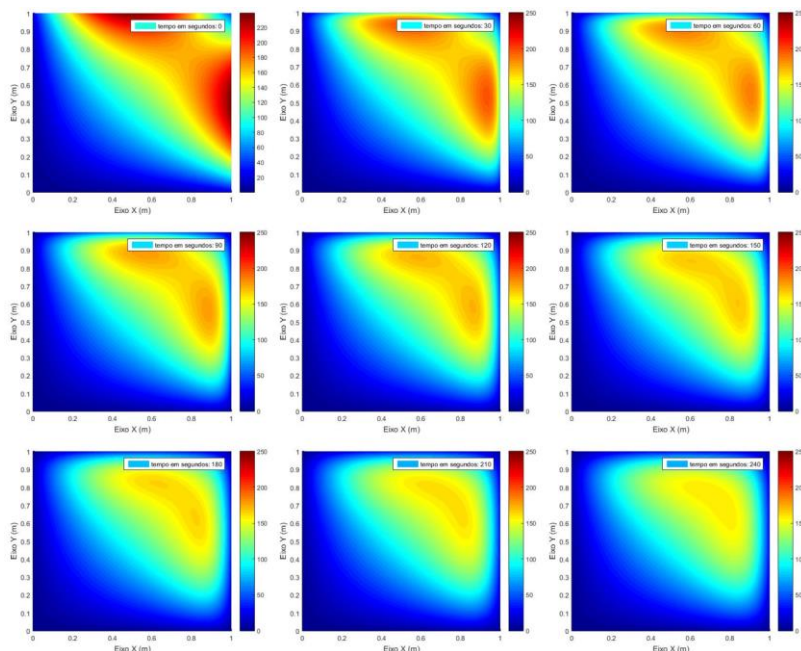


Figura 5. Representação gráfica da temperatura de uma placa quadrada de lado $l = 1 \text{ m}$ durante 240 segundos. (Elaborada pelo autor)

Com o objetivo de se validar o resultado obtidos pela aplicação do método de diferenças finitas na Equação da difusão a comparação com o software Ansys® foi realizada novamente.

A simulação foi realizada através do sistema de análise “Transient Termal” com as mesmas condições impostas no problema de contorno apresentado. A comparação entre os dois métodos pode ser vista nas Fig. 6a e Fig. 6b.

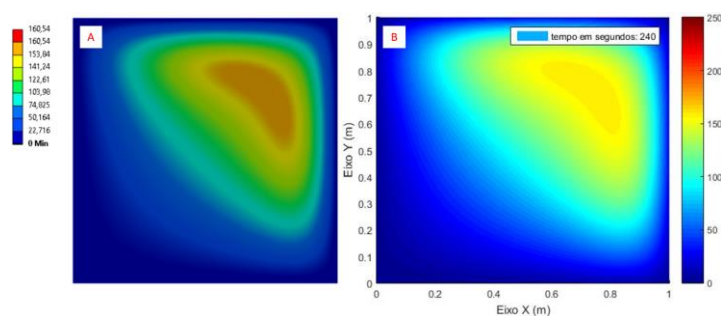


Figura 6. a) representação gráfica da temperatura da placa no tempo $t = 240 \text{ s}$ obtida pelo software Ansys® - b) representação gráfica da temperatura da placa no tempo $t = 240 \text{ s}$ obtida pelo GNU Octave® (Elaborada pelo autor)

Além da análise gráfica, foram comparados os valores exatos da temperatura nos mesmos cinco pontos analisados para a equação de Laplace, como pode ser visto na Tab.2.

Tabela 2. Comparação da temperatura de 5 pontos obtida por diferentes métodos no instante de tempo $t = 240 \text{ s}$ (Elaborada pelo autor)

Coordenada X [m]	Coordenada Y [m]	Temperatura [°C] Ansys 24960 nós	Temperatura [°C] Método Numérico 24964 nós	Erro relativo [%]
0,6531	0,8367	152,71	154,00	-0,84
0,5714	0,0612	16,79	18,36	-9,35
0,1429	0,8184	60,95	62,70	-2,87
0,2041	0,3878	35,03	35,83	-2,28
0,8163	0,3469	126,4	126,80	-0,32

4. CONCLUSÕES

Em uma primeira análise, considerando os resultados obtidos para a solução da equação de Laplace, equação do calor bidimensional em regime permanente, tomou-se como valor de referência o resultado obtido pelo software Ansys® com malha de resolução próxima à utilizada no método numérico, com 24960 nós. Mesmo que o software utilize um método numérico mais complexo, o método dos elementos finitos, é possível afirmar que o método das diferenças finitas aplicado apresentou resultados semelhantes.

Mais precisamente, o método adotado, quando considerada uma malha com 2500 nós, apresentou erro relativo médio de -7,76% quando comparado com os resultados do software Ansys®. Refinando a malha para 24964 nós ocorreu uma redução no erro médio relativo de -7,76% para -2,27%, conforme o esperado ao reduzir a malha.

Considerando apenas o erro médio encontrado, pode-se afirmar, a partir da comparação dos resultados obtidos pela utilização do método numérico das diferenças finitas e pelo software Ansys®, que o método das diferenças finitas aplicado apresentou resultados satisfatórios.

Por outro lado, analisando a fundo os resultados obtidos, percebe-se que de modo geral o erro relativo foi menor que 1% em pontos suficientemente distantes das extremidades da placa, enquanto pontos suficientemente próximos da extremidade, como o ponto de coordenadas $x = 0,5714$, $y = 0,0612$ apresentaram erro maior, neste caso, de -8,39%. O comportamento em questão (aumento do erro ao aproximar pontos da extremidade da placa) pode ser justificado pela forma em que as condições de contorno foram implementadas no código utilizado, uma vez que o estudo manteve o foco na resolução geral da equação de Laplace, sem aprofundar em amplas variações das condições de contorno.

Em segunda análise, pode-se afirmar que os resultados obtidos pela solução da equação da difusão pelo método das diferenças finitas são suficientes para demonstrar o funcionamento do método, uma vez que foi possível solucionar o problema de contorno em questão, observando a evolução temporal do perfil de temperaturas da placa analisada.

Ademais, o método adotado apresentou novamente baixos erros quando comparado com os resultados do software Ansys®, uma vez que o erro relativo médio foi de -3,13% para malha de 24964 nós.

Com isso, é possível afirmar que o método das diferenças finitas apresentou resultados consistentes, mantendo um erro relativo na ordem de -3%, quando utilizada malha de tamanho semelhante à utilizada no software Ansys®

Assim, visando dar continuidade ao estudo do tema e aperfeiçoar os resultados obtidos, sugere-se como trabalhos futuros: o estudo detalhado das condições de contorno aplicadas à equação de Laplace e equação da difusão para reduzir os erros presentes em pontos próximos às bordas da placa; a calibração de ambos os métodos por meio da comparação com dados reais ou obtidos por outros métodos mais utilizados; a comparação mais detalhada dos métodos, considerando mais de um problema de contorno e uma amostragem maior de pontos e por fim, a aplicação do método em diferentes domínios.

Com as continuações supracitadas será possível estabelecer um método simples e eficaz que auxiliará na análise da distribuição de temperaturas na usinagem com ferramenta de geometria definida, no projeto de máquinas térmicas, na manutenção de componentes mecânicos, bem como em outros processos que necessitem da análise permanente ou transiente da distribuição de temperatura em meios sólidos.

5. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil (CNPq) através do programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME-OBMEP)

6. REFERÊNCIAS

- Belussi, G.M., 2007. Solução numérica da equação de difusão - advecção. Trabalho de conclusão de curso (bacharel em matemática). Faculdade de matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.
- Bergman, T.L. et al., 2014. Fundamentos de transferência de calor e massa. Tradução técnica Pessoa F.L.P., Queiroz E.M. LTC, Rio de Janeiro, 7ª edição.
- Cristina, M. e Cunha, C., 2003. Métodos Numéricos. Editora da Unicamp, Campinas, 2ª edição.
- Stewart, J., 2009. Cálculo: volume 2. Tradução técnica Moretti A.C., Martins A.C.G. Cengage Learning, São Paulo, 6ª edição.
- Zill, D.G. e Cullen, M.R., 2001. Equações Diferenciais: volume 2. Tradução técnica Farias A.A. Pearson, São Paulo, 3ª edição.

7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.