

ESTUDO DO POTENCIAL DA TÉCNICA DE FILTRAGEM NO COMBATE AO FENÔMENO DE GIBBS

Breno Gustavo Silva Vilela, breno.vilela@ufpe.br¹
Mariana Fernandes dos Santos Villela, mariana.villela@ufpe.br¹
Felipe Pamplona Mariano, fp.mariano@ufg.br²

¹Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Núcleo de Tecnologia, Laboratório de Engenharia Computacional (LECOM), Av. Marielle Franco, s/n, Nova Caruaru, Bloco K, 3º andar, sala K10, CEP: 55014-900 Caruaru, PE-Brasil

²Universidade Federal de Goiás, Laboratório de Engenharia Térmica e de Fluidos (LATEF), Av. Esperança, s/n, Campus Samambaia, Prédio B5, CEP: 74.690-900 - Goiânia - GO

Resumo. O método Espectral de Fourier (MEF) possui alta taxa de convergência numérica e alta acurácia aliado ao baixo custo computacional devido ao algoritmo da Transformada Rápida de Fourier (FFT). Porém, esta metodologia apresenta desvantagens ao utilizá-la em problemas não-periódicos ou com a presença de descontinuidades dado ao surgimento de oscilações espúrias nas suas soluções, o chamado fenômeno de Gibbs. Sabe-se que inúmeros são os fenômenos físicos representados por funções por partes suaves, descontínuas ou não-periódicas, como problemas na aeronáutica e engenharia espacial envolvendo fluxos de fluidos que contém ondas de choque, isto é, descontinuidades no campo de pressão, à exemplo disso. Assim, a MEF fica restrito a características não condizentes à natureza de muitos destes problemas físicos, os quais se beneficiariam fortemente de seu uso. Para lidar com tal empecilho, uma conhecida técnica de pós-processamento é a filtragem, que possui robustez e eficiência computacional. Dessa forma, o presente trabalho tem por objetivo conduzir um estudo da técnica de filtragem trazendo à tona sua potencialidade e possibilidade de eliminar às oscilações de Gibbs, tornando viável a utilização do MEF à problemas não periódicos e descontínuos.

Palavras chave: Método Espectral de Fourier. Fenômeno de Gibbs. Filtragem, Filtros Espectrais.

Abstract. The Fourier Spectral method (FEM) has a high numerical convergence rate and high accuracy combined with low computational cost due to the Fast Fourier Transform (FFT) algorithm. However, this methodology shows disadvantages when used in non-periodic problems or with the presence of discontinuities given the appearance of spurious oscillations in its solutions, the titled Gibbs phenomenon. It is known that there are countless physical phenomena represented by smooth, discontinuous or non-periodic piecewise functions, such as problems in aeronautics and space engineering involving fluid flows that contain shock waves, i.e., discontinuities in the pressure field. Thus, the FEM is restricted to characteristics that are not consistent with the nature of many of these physical problems, which would strongly benefit from its use. In order to deal with such issue, a well-known post-processing technique is filtering, which has robustness and computational efficiency. Therefore, the present work conducts a study of the filtering technique, highlight its potential and possibility of eliminating the Gibbs oscillations, and making the use of FEM feasible for non-periodic and discontinuous problems.

Keywords: Fourier Spectral Method, Gibbs Phenomenon, Filtering, Spectral Filters.

1. INTRODUÇÃO

Os métodos espectrais utilizam de expansões em séries truncadas de funções de aproximação global para aproximar uma solução, sendo assim, o Método Espectral de Fourier (MEF) utiliza das séries de Fourier para realizar tal aproximação com alta acurácia e precisão. Apesar desta grande acurácia, as metodologias espectrais geralmente possuem alto custo computacional, e por isso a viabilidade da utilização do MEF se tornou relevante após a introdução do algoritmo “Fast Fourier Transform” (FFT) por Cooley e Tukey (1965), reduzindo o custo computacional intrínseco ao método de $O(N^2)$ para $O(N \log_2 N)$, onde N é o número de pontos de colocação (Canuto, 1987).

Ainda, conquanto a introdução do algoritmo possibilitou novos caminhos menos onerosos à simulação numérica de diversas equações físicas, a incapacidade da aproximação de Fourier manter uma alta convergência para alguns problemas tornou a aplicação do MEF limitada, devido ao Fenômeno de Gibbs.

O fenômeno de Gibbs se trata do aparecimento de oscilações nas soluções numéricas quando se faz uso da série de Fourier finita – apesar de não ser restringida a expansão de Fourier uma vez que pesquisadores observaram o efeito em outras expansões (Gottlieb e Shu, 1997) – para aproximar uma dada função que possui descontinuidades ou não é suave ou funções não periódicas. De uma perspectiva mais aprofundada, tomando uma função por partes suave que apresenta descontinuidades finitas, a sua expansão finita implica em um decaimento de primeira ordem (Tadmor, 2007). Neste contexto, esse decaimento de primeira ordem dos coeficientes de Fourier falha em poder assegurar convergência uniforme sobre toda aproximação, uma vez que picos na convergência local vão se acumulando e, conseqüentemente, gerando oscilações espúrias, sobretudo próximo às regiões de descontinuidade. Ademais, apesar do erro entre a solução exata e a aproximação decair conforme se afasta da descontinuidade, esse decaimento também está limitado à primeira ordem, e ocasiona na perda de acurácia espectral advinda do Método Espectral de Fourier.

Partindo dessa perspectiva, supõe-se que ao aumentar o decaimento dos coeficientes de Fourier de maneira que não haja interferência drástica em sua exatidão, pode-se assim reduzir tal anomalia. Essa é a proposta trazida pelos Filtros Espectrais: aumentar a taxa de convergência da série de Fourier a partir da informação espectral contida em seus coeficientes com o intuito de atenuar o fenômeno de Gibbs.

A fim de demonstrar isso, o presente trabalho tem por objetivo testar a potencialidade de cinco distintos filtros espectrais, visualizando, por fim, a viabilidade de suas aplicações. Para isso, a implementação do processo de filtragem foi realizada em ambiente do Matlab, onde utilizou-se de uma função analítica por partes com a presença de um salto e observou-se a ocorrência da anomalia de Gibbs, advinda de uma derivada espectral.

2. METODOLOGIA

Nesta seção, objetiva-se demonstrar a modelagem matemática do Método Espectral de Fourier e suas propriedades. Continua-se por definir matematicamente os filtros e sua natureza espectral, enumera-se os filtros analisados e dita-se o passo a passo da técnica de filtragem.

2.1. Metodologia Espectral de Fourier

A metodologia espectral de Fourier consiste em usar numericamente da transformada de Fourier, a Transformada Discreta de Fourier (DFT), conforme a Eq. (1),

$$\hat{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{-\frac{2i\pi kn}{N}}, \quad (1)$$

onde f_n é a função no domínio físico, k representa o vetor de números onda, i é o número imaginário $i = \sqrt{-1}$ e N o número de pontos. O vetor k foi calculado por $k_\mu = \mu - 1$ para $1 < \mu < N/2 + 1$ e $k_\mu = \mu - 1 - N$ para $N/2 + 2 < \mu < N$, onde μ é a posição do elemento no vetor computacional. Similarmente, a Transformada Inversa Discreta de Fourier (IDFT) é descrita na Eq. (2).

$$f_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \hat{f}_k e^{\frac{2i\pi kn}{N}}. \quad (2)$$

Uma das propriedades da transformada de Fourier tida como relevante para a presente análise é a da derivação, vista na Eq. (3),

$$\frac{\partial^n \hat{f}_k}{\partial k^n} = (ik)^n \hat{f}_k, \quad (3)$$

onde n é a ordem da derivada.

2.2. Modelagem matemática dos filtros

Os filtros espectrais utilizam da informação existente nos coeficientes de Fourier, seja f_n a aproximação da IDFT, Eq. (2), então a aproximação filtrada f_n^σ é dada pela Eq. (4).

$$f_n^\sigma = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \hat{f}_k \times \sigma(\eta) \times e^{\frac{2i\pi kn}{N}}. \quad (4)$$

onde $\sigma(\eta)$ o filtro utilizado, com $\eta = \frac{L \times k}{N}$ e L o comprimento do domínio.

Vandeven (1991) traz a definição geral de um filtro descrevendo que uma função real e suave $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser um filtro de ordem p se satisfaz:

1. $\sigma(0) = 1, \sigma^l(0) = 0, 1 \leq l \leq p,$
2. $\sigma(\eta) = 0, 1 \leq |\eta|,$
3. $\sigma \in C^{p-1}.$

Contudo, a modelagem de filtros não fica limitada a tais regras, visto a existência de filtros que não respeitam à itens anteriormente listados, como discutido por Jiahong (1998).

2.3. Filtros Espectrais

Ao longo do passar dos anos, foram desenvolvidos diversos exemplos de funções as quais se adequam às condições de filtros. Porém, é de extrema importância salientar que o desempenho dos filtros está por vezes ligado ao problema com o qual se está lidando. Desse modo, às situações as quais necessitam de longos processos iterativos, é imprescindível uma investigação para balancear o potencial de filtragem, com o quanto se é factível filtrar, para que não haja nem pouca recuperação nem grande perda de informação. Nesse contexto, os filtros utilizados no presente trabalho para avaliação do potencial são dados nas Eqs. (5) a (9).

O filtro de Féjer é o filtro de primeira ordem dado na Eq. (5).

$$\sigma_1(\eta) = 1 - |\eta|. \quad (5)$$

O filtro de Lanczos é o filtro de segunda ordem dado na Eq. (6).

$$\sigma_2(\eta) = \frac{\sin(\pi\eta)}{\pi\eta}. \quad (6)$$

O filtro “Raised Cosine” também é um filtro de segunda ordem dado na Eq. (7).

$$\sigma_3(\eta) = \frac{1}{2} \times [1 + \cos(\pi\eta)]. \quad (7)$$

O filtro “Sharpened Raised Cosine” é o filtro de oitava ordem dado na Eq. (8).

$$\sigma_4(\eta) = \sigma_3^4(\eta) \times [35 - 84\sigma_3(\eta) + 70\sigma_3^2(\eta) - 20\sigma_3^3(\eta)]. \quad (8)$$

O filtro Exponencial de ordem p , onde p é par, é dado pela Eq. (9).

$$\sigma_5(\eta) = e^{-\alpha|\eta|^p}. \quad (9)$$

É notório que o filtro exponencial não se adequa formalmente na definição de filtro de Vandeven, pois $\sigma_5(1) = e^{-\alpha} \neq 0$. Dessa maneira, pode-se escolher $e^{-\alpha}$ igual ao erro de máquina, $\varepsilon = 10^{-16}$ para dupla precisão, a fim de que o valor seja aproximado numericamente para zero.

2.4. Técnica de filtragem

A aplicação da técnica de filtragem compreende-se em reproduzir a expressão antes demonstrada na Eq. (4). Logo, o procedimento de análise se dá da seguinte maneira:

1. Passa-se a f_n para o espaço espectral aplicando a FFT, gerando \hat{f}_k .
2. Obtém-se a derivada espectral de \hat{f}_k , $ik \times \hat{f}_k$.
3. Multiplica-se a derivada espectral pelo filtro desejado $\sigma_n(\eta)$.
4. Retorna-se para o espaço físico aplicando a IFFT, obtendo a solução filtrada f_n^σ .

Lembra-se, aqui, que caso se busque observar o fenômeno de Gibbs, repete-se o processo descrito, com $\sigma_n(\eta) = 1$.

2.5. Problema proposto

O objeto de estudo são as oscilações espúrias de Gibbs advinda das derivadas espectrais. É utilizada a função descrita na Eq. (10).

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2}\right), & -\pi \leq x \leq 0 \\ -\sin\left(\frac{x}{2}\right), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}. \quad (10)$$

A derivada analítica da Eq. (10) pode ser observada na Eq. (11), e, nota-se uma descontinuidade em $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right), & -\pi \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}. \quad (11)$$

A Figura 1a e 1b ilustram graficamente as funções dadas pelas Eq. (10) e Eq. (11).

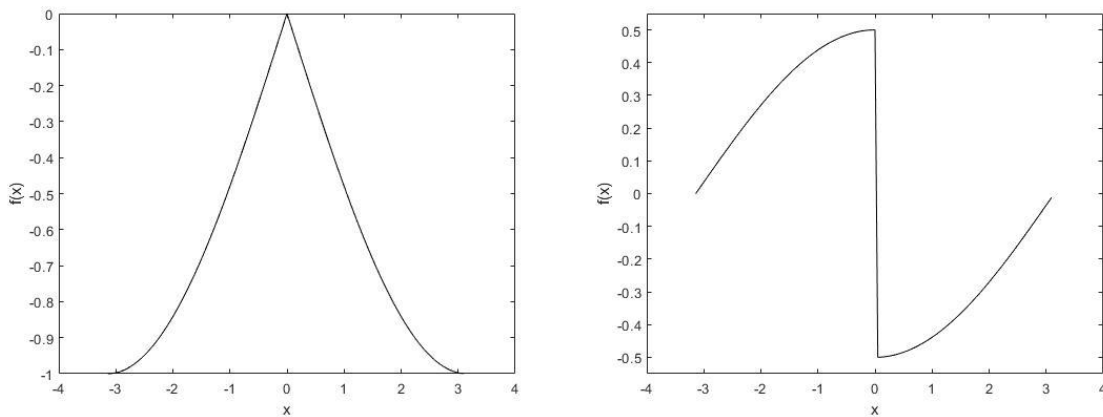


Figura 1. Representação gráfica das funções com $N = 128$ pontos de colocação: (a) obtida pela Eq. 10; (b) obtida pela Eq. 11.

Calculando numericamente a derivada da Eq. 10, utilizando o método espectral de Fourier (algoritmo mostrado na seção 2.4), observa-se através da Fig. 2 o fenômeno de Gibbs ao resolver a derivada espectral para um domínio $L = 2\pi$ e $N=128$ pontos de colocação. A partir dessas oscilações, utiliza-se os filtros com o intuito de tornar o resultado mais acurado. Para avaliar quantitativamente o processo de filtragem calcula-se as normas L_1 e L_2 , e menor erro pontual pelas Eq. (12), Eq. (13) e Eq. (14), respectivamente.

$$L_1 = \max(|U_e - U_N|), \quad (12)$$

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |U_e - U_N|^2}, \quad (13)$$

$$E_p = \min(|U_e - U_N|), \quad (14)$$

onde U_e é a solução exata e U_N é a solução numérica.

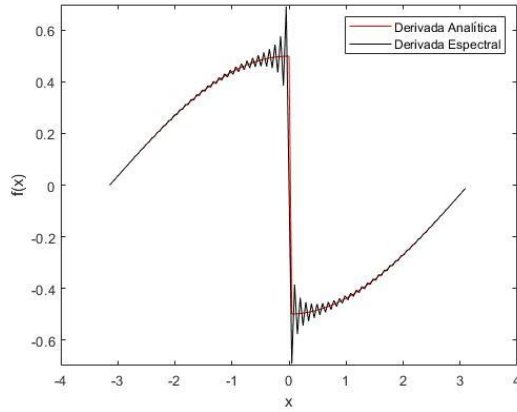
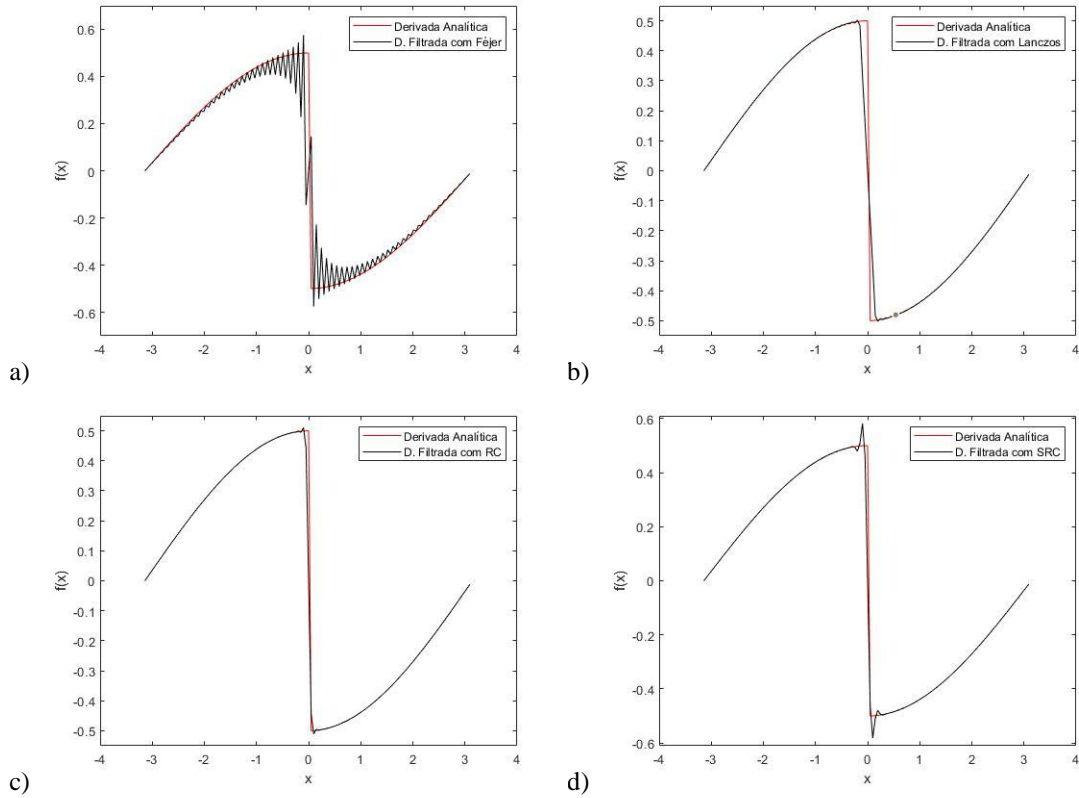


Figura 2. Derivada espectral do problema proposto exibindo o fenômeno de Gibbs, para $N=128$.

3. RESULTADOS

Nesta seção apresenta-se os resultados obtidos advindos da análise do processo de filtragem do problema proposto na seção 2.5. A representação gráfica dos resultados obtidos na aplicação da técnica de filtragem para os cinco filtros mencionados pode ser vista na Fig. 3, para $N = 128$.



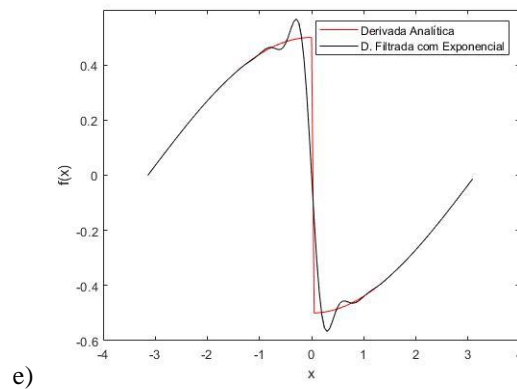
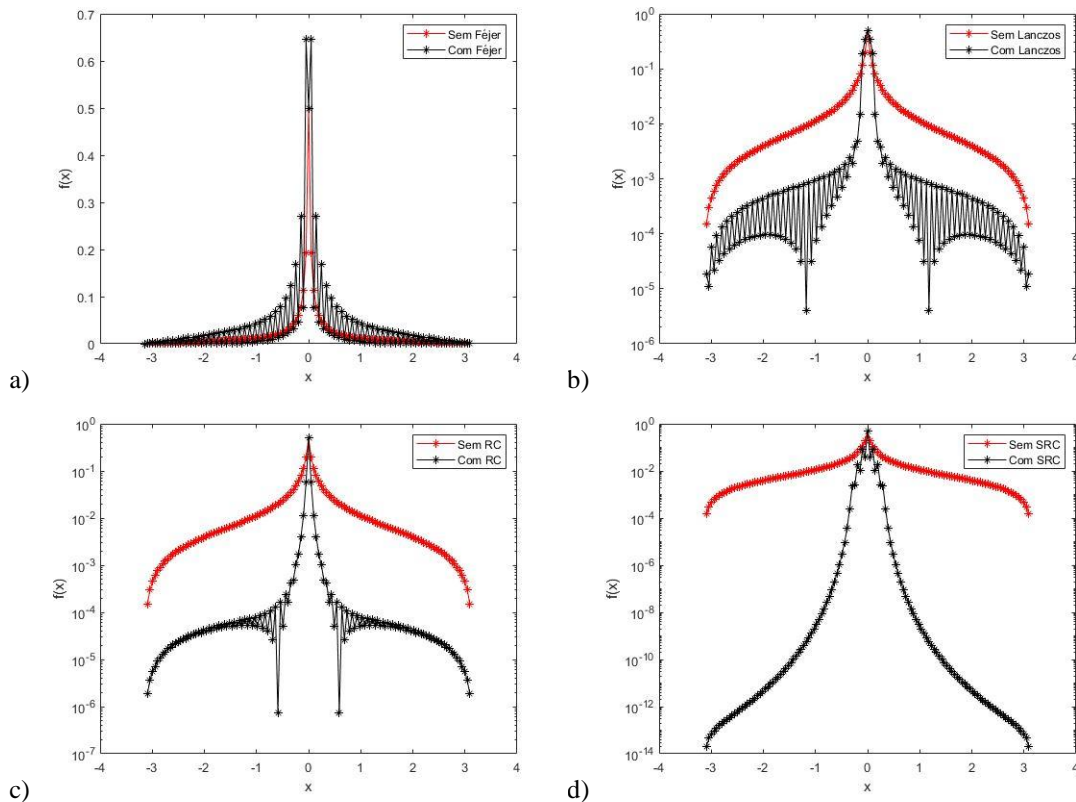


Figura 3. Solução filtrada para os filtros introduzidos. (a) Filtro de Féjer, (b) Filtro de Lanczos, (c) Filtro Raised Cosine, (d) Filtro Sharpened Raised Cosine e (e) Filtro Exponencial com $p = 6$, para $N = 128$

Sob uma perspectiva qualitativa, nota-se que os filtros “Raised Cosine” e “Sharpened Raised Cosine” obtiveram os melhores resultados, visto que se vê uma forte diminuição das oscilações. Em contrapartida, o filtro de Féjer obteve o pior desempenho, agravando o fenômeno. Como já esperado, os filtros conseguem suavizar as oscilações sobre o domínio como um todo, apesar de ainda pequenas oscilações serem observadas quando se aproxima da descontinuidade. A Figura 4 proporciona uma melhor observação de como o erro decai ao longo do domínio. Nela é verificada a análise do erro pontual em relação a solução analítica para o resultado pós-filtragem (em preto) e para o resultado com a presença do fenômeno de Gibbs (em vermelho). Além disso, de um ponto de vista quantitativo, o menor erro pontual constatado para a solução filtrada pode ser encontrado na Tab. 1.



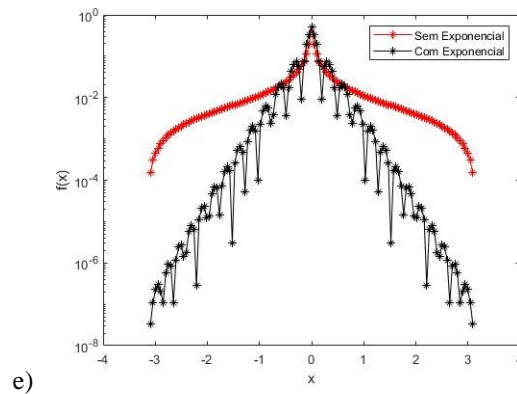


Figura 4. Erro pontual da solução com Gibbs antes e após a aplicação dos filtros. (a) Filtro de Féjer, (b) Filtro de Lanczos, (c) Filtro Raised Cosine, (d) Filtro Sharpened Raised Cosine e (e) Filtro Exponencial, para $N = 128$

Tabela 1. Menor erro pontual encontrado antes e após filtragem do problema proposto para $N = 128$.

Situação	E_p
Sem filtro	1.50591×10^{-4}
Filtro de Féjer	1.11106×10^{-4}
Filtro de Lanczos	4.02234×10^{-6}
Filtro “Raised Cosine”	7.25539×10^{-7}
Filtro “Sharpened Raised Cosine”	2.06657×10^{-14}
Filtro Exponencial ($p=6$)	3.29921×10^{-8}

Nota-se, pela Tab. 1, que os filtros Sharpened Raised Cosine e Exponencial obtiveram menor perda de informação ao apresentar bons resultados longe do salto em $x = 0$. É importante mencionar que o filtro exponencial foi testado para $p = 2, 4, 6, 8, 10$ e 12 , e $p = 6$ foi o que exibiu melhores resultados para tal estudo. Também, visualizou-se que em geral ocorre o gradual aumento de acurácia ao se distanciar de $x = 0$, de maneira que a recuperação de informação tem em sua natureza uma forma simétrica.

Na Tab. 2, tem-se as normas L_1 e L_2 . Devido à baixa eficiência dos filtros nas proximidades da descontinuidade, as normas acabam por ser fortemente afetadas. Com exceção do filtro de Féjer, todos os filtros demonstram o mesmo erro de aproximadamente 0.5 para a norma L_1 .

Tabela 2. Normas calculadas antes e após filtragem do problema proposto para $N = 128$.

Situação	L_1	L_2
Sem filtro	0.5000000000000001	0.626863027286183
Filtro de Féjer	0.645931103929738	1.190282669864230
Filtro de Lanczos	0.5000000000000001	0.741867534089406
Filtro “Raised Cosine”	0.5000000000000001	0.506728134931097
Filtro “Sharpened Raised Cosine”	0.5000000000000001	0.517338431011489
Filtro Exponencial ($p=6$)	0.5000000000000001	0.773442829750212

4. CONCLUSÃO

A partir dos testes exibidos com os filtros espectrais, pôde-se visualizar de forma quantitativa e qualitativa, o comportamento, a eficácia e o potencial proporcionado pela técnica de filtragem no combate às oscilações espúrias de Gibbs. Nota-se que os filtros suavizam as oscilações espúrias e a atenuam propagação do mesmo, e, associado a análise quantitativa, os filtros se mostraram como ferramentas viáveis de serem implementadas.

Para o problema proposto, o filtro Sharpened Raised Cosine de oitava ordem apresentou os melhores resultados, com erros pontuais que chegaram à ordem espectral $O(-14)$, em contrapartida dos resultados para o filtro de Féjer de primeira ordem, que acentuou o erro das oscilações, vide a Fig. 3. e a norma calculada na Tab. 2. Ainda, os testes possibilitaram a visualização de sua natureza simétrica, bem como o fato de que a convergência no decorrer do domínio da função não

pode ser totalmente recuperada, apenas acrescida, de maneira que o erro decresce ao passo que se distancia do ponto de descontinuidade.

Nesse contexto, os filtros se mostram capazes de conseguir recuperar uma grande quantidade de informação, conseguindo atenuar bem o fenômeno de Gibbs quando longe de uma descontinuidade. Entretanto, quando próximos a região de salto estes são basicamente ineficazes, essa ineficácia sendo talvez sua única característica onerosa. Por fim, enfatiza-se que são essencialmente problema-dependentes, o que significa uma necessidade inerente da testagem dos diferentes tipos de filtros para que assim se possa atingir os melhores desempenhos.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores do presente trabalho agradecem à FURNAS Centrais Elétricas e ao Programa de Pesquisa e Desenvolvimento Tecnológico P&D da ANEEL pelo apoio financeiro.

6. REFERÊNCIAS

Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. e Zang, T. A., 1987. *Spectral methods in fluid dynamics*. New York: Spriger Verlag.

Cooley, T. W. e Tukey, J. W., 1965. *An algorithm for the machine calculation of complex fourier series*. Mathematics Computation, v. 19, p. 297–301.

Gottlieb, D. e Shu, C., 1997. *On the Gibbs Phenomenon and Its Resolution*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). SIAM Review 1997 39:4, 644-668.

Jiahong, Y., 1998. *Reconstrução de funções a partir de coeficientes de Fourier e de Momentos Ortogonais: Novos Métodos*. Tese de Doutorado em Matemática Aplicada. Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Tadmor, E., 2007. *Filters, mollifiers and the computation of the Gibbs phenomenon*. Department of Mathematics, Institute for Physical Science & Technology and Center for Scientific Computation and Mathematical Modeling (CSCAMM). University of Maryland, United States.

Vandeven, H., 1991. *Family of spectral filters for discontinuous problems*. Journal of Scientific Computing. Vol. 6 No. 2.

7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.