

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS ELÍPTICOS POR MEIO DO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS EM MALHAS NÃO ESTRUTURADAS TRIANGULARES

Gabriel Henrique Silveira Parizoto, gabrielparizoto@hotmail.com¹
Gylles Ricardo Ströher, gylles@utfpr.edu.br²

¹Universidade Estadual de Londrina, Dep. de Matemática, Rodovia Celso Garcia Cid, 900, 86057-970, Londrina - PR, Brasil,

²Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Coord. de Engenharia Química, Rua Marçílio Dias, 635, 86812-460, Apucarana - PR, Brasil.

Resumo. O presente trabalho apresenta um esquema de solução numérica de Equações Diferenciais Parciais Elípticas (EDPEs) por meio do Método dos Volumes Finitos (MVF) formulado em malhas não estruturadas triangulares, cuja ordem de convergência teórica é $O(h^2)$. Também expõe um estudo computacional da sensibilidade da ordem de convergência deste esquema em relação à qualidade dos elementos utilizados na tecelagem da malha. Uma EDP com solução analítica conhecida foi solucionada por meio do esquema proposto em domínios discretizado por malhas de diferentes níveis de qualidade. Tais malhas foram geradas por uma metodologia que produz elementos com graus de distorção idênticos. Os erros nas normas L_2 e L_{RMS} , associados a cada solução, foram comparados de forma que pôde-se obter a ordem de convergência de cada uma das simulações. Os resultados evidenciam uma forte correlação entre a ordem de convergência do esquema e a qualidade geral das malhas utilizadas, com esta relação sendo diretamente proporcional. Ainda, o aumento da distorção nos elementos das malhas levou a um maior custo computacional. Apesar deste inconveniente, a solução numérica obtida não destoou consideravelmente da solução analítica, mesmo nos casos em que as malhas mais distorcidas foram utilizadas.

Palavras chave: Equações Diferenciais Parciais Elípticas, Método dos Volumes Finitos, Malhas não estruturadas, Difusão, Ordem de convergência

Abstract. This work presents a numerical scheme to solve Elliptic Partial Differential Equations (EPDEs) by means of the Finite Volume Method (FVM) formulated for unstructured triangular grids, with theoretical rate of convergence is equal to $O(h^2)$. We also present a computational study of the sensibility of the method's rate of convergence when meshes of different qualities are used. A known PDE with analytical solution was solved using the proposed scheme over domains discretized by meshes with different quality levels. Those meshes were generated by an algorithm that produces elements with the same distortion levels. The errors on L_2 and L_{RMS} norms, associated to each solution, were compared between them to find the rate of convergence of each simulation. The results showed that there is a strong direct correlation between the mesh quality and the accuracy of the results obtained. Nonetheless, the bigger the distortion, the most computational cost was required. Even with this issue, the numerical solutions were, in general, satisfactory.

Keywords: Elliptic Partial Differential Equations, Finite Volume Method, Unstructured Meshes, Diffusion, Rate of Convergence

1. INTRODUÇÃO

Equações diferenciais nasceram com o Cálculo de Isaac Newton (1642 – 1727) e Gottfried W. Leibniz (1646 – 1716), são objetos que estabelecem uma identidade entre variáveis independentes, uma variável dependente e suas derivadas parciais em relação às variáveis independentes. Tais objetos são uma das mais poderosas ferramentas matemáticas para a modelagem de fenômenos complexos (Bassanezi and Junior (1988); Boyce *et al.* (2017); Chapra and Canale (2011)).

O conjunto das equações diferenciais é muito amplo. Há um subconjunto especial destes objetos que é formado pelas Equações Diferenciais Parciais Elípticas (EDPEs), que aparecem com frequência na modelagem de fenômenos independentes do tempo, ou estacionários. Estes fenômenos indicam que alguma condição de equilíbrio dentro do sistema físico em questão fora atingida, não necessitando que não haja a ocorrência de algum fenômeno de transporte, bastando apenas que o fluxo, se existir, seja invariante no tempo. Na Física, tais fenômenos ocorrem, usualmente, como resultado final de fenômenos dependentes do tempo. São exemplos de fenômenos elípticos: a distribuição de calor em uma superfície em regime permanente, a distribuição do potencial eletrostático ao redor criada por um objeto carregado eletricamente e a distribuição de tensões em uma placa submetida a um carregamento estático (Versteeg and Malalasekera (2007); Fortuna

(2000); Maliska (2004)).

Matematicamente, a forma geral de uma EDPE, definida em um domínio bidimensional Ω e utilizando um sistema de coordenadas cartesianas, é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = -S_\phi(x, y), \quad (1)$$

de modo que $\Gamma(x, y) \geq 0$ é o coeficiente de difusão da grandeza ϕ no meio de suporte, podendo variar de acordo com a posição (x, y) e $S_\phi(x, y)$ é o termo fonte. Todavia, Strauss (2008), Fortuna (2000) e Leveque (2007) ressaltam que um problema elíptico só se torna bem definido se as condições de contorno na borda $\partial\Omega$ do domínio forem especificadas. Majumdar (2005), Mazumder (2016) e Özişik *et al.* (2017) elencam os três tipos canônicos de condições de contorno para problemas elípticos, são elas: condição de contorno de Dirichlet, de Neumann e de Robin, representadas respectivamente pelas equações:

$$\phi|_{\partial\Omega} = \psi(\mathbf{x}), \quad (2)$$

$$\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \psi(\mathbf{x}) \quad (3)$$

e

$$\alpha(\mathbf{x})\phi|_{\partial\Omega} + \beta(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \psi(\mathbf{x}), \quad (4)$$

sendo $\alpha(\mathbf{x}), \beta(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ funções conhecidas. As soluções dos problemas elípticos são diretamente influenciadas, em todo o domínio Ω , pelas informações sobre ϕ disponíveis na fronteira $\partial\Omega$ da região. Esta característica os situam na classe dos Problemas de Valores de Contorno (PVC), pois não há direção preferencial de propagação da informação transmitida, e efeitos oriundos do termo fonte $S_\phi(x, y)$ também alteram a solução das EDPEs em todo o domínio Ω .

Um revés inexorável relacionado ao estudo das equações diferenciais reside no fato de que é extremamente difícil obter soluções exatas para tais equações. Apenas alguns exemplares mais simplificados, com condições de contorno e geometrias triviais, são possíveis de ser solucionados. Estas equações são de pouco proveito prático, uma vez que não incorporam diversas nuances relevantes à modelagem de problemas reais de Física, Química e Engenharia. O preço que se paga ao adicionar minúcias na modelagem de um fenômeno é uma EDP mais complexa, cuja solução analítica, se existir, pode ser impossível de ser obtida pelas técnicas disponíveis na literatura. Neste contexto, as técnicas de solução numérica de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) são de grande valia, pois desempenham o prestigiado papel de proporcionar resultados precisos e confiáveis para problemas complexos da fronteira da ciência (Mazumder (2016); Maliska (2004); Patankar (1980)).

O processo de solução numérica de uma EDP é denominado por discretização, e é estabelecido ao substituir o problema original, definido sobre um domínio Ω contínuo e governado pela EDP em questão, por um sistema de equações algébricas, definidas apenas em uma quantidade finita de pontos no então domínio discretizado, denominado malha. Dentre as técnicas numéricas utilizadas para esta tarefa, o Método dos Volumes Finitos (MVF) se destaca por sua natureza conservativa, fácil implementação computacional e adaptatividade à geometrias complexas, tornando-o a técnica mais popular nos estudos em Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC), mas abrangendo também outras áreas (Patankar (1980); Maliska (2004); Versteeg and Malalasekera (2007); F. Moukalled (2016)).

A facilidade do MVF em lidar com geometrias irregulares é oriunda da possibilidade de ser formulado em domínios discretizado por malhas não estruturadas, que são malhas onde o número de vizinhos que cada elemento possui não é constante, e não há a possibilidade de mapear, com correspondência biunívoca, as células desta malha com as entradas de uma matriz. A principal vantagem associada ao uso de malhas não estruturadas é a capacidade de representar de forma fidedigna as irregularidades da borda $\partial\Omega$ sem recorrer a refinamentos excessivos, resultando em um bom custo benefício entre precisão e esforço computacional. Contudo, o uso deste tipo de malha requer alguns itens extras para a implementação computacional, sendo o principal deles a lista de conectividade entre os elementos. Tal importância é proveniente da carência de uma regra geral explícita para identificar o compartilhamento de faces e vértices entre as células (Mazumder (2016); F. Moukalled (2016); Versteeg and Malalasekera (2007)).

O presente trabalho apresenta uma análise empírica da ordem de convergência de uma metodologia de discretização de EDPEs utilizando o Método dos Volumes Finitos formulado em malhas não estruturadas triangulares do tipo *cell-centered*, bem como a robustez desta metodologia ante ao grau de distorção das células utilizadas na tecelagem da malha. Os experimentos foram realizados a partir de um código computacional feito em linguagem MATLAB, desenvolvido exclusivamente para esta tarefa.

2. METODOLOGIA

2.1 Desenvolvimento da metodologia de discretização

A discretização da forma geral de uma EDPE dada pela Eq. (1) por meio do MVF foi obtida integrando todos os termos desta equação sobre um volume de controle arbitrário Ω_P (com exceção dos volumes de borda). Admitindo que o coeficiente $\Gamma(x, y)$ é constante dentro de cada volume de controle, integrando o lado esquerdo sobre o volume arbitrário e utilizando a regra do ponto médio na integral sobre o termo fonte, tem-se:

$$\Gamma_P \int_{\Omega_P} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] dA = -\bar{S}_\phi |\Omega_P|, \quad (5)$$

de modo que \bar{S}_ϕ é o valor médio de S_ϕ e $|\Omega_P|$ é a área do volume de controle Ω_P . Seguindo o esquema ilustrado pelo diagrama mostrado na Fig. 1, P denota o centróide do elemento que está sendo avaliado e N_i o centróide de seu vizinho. Os vértices são denotados por v_{ij} , referindo-se ao j -ésimo vértice da i -ésima face, tendo esta o seu ponto médio denotado por f_i . Os pontos médios dos segmentos que ligam os vértices v_{ij} aos centróides são representados por setas cujas direções informam a ordem considerada para os cálculos. Fazendo $F = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ e $G = \frac{\partial \phi}{\partial y}$, aplicando o teorema de Green na integral do lado esquerdo da igualdade e utilizando a convenção de soma de Einstein, obtém-se:

$$\Gamma_P \int_{\Omega_P} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] dA = \Gamma_P \oint_{\partial \Omega_P} (F dy - G dx) = \Gamma_P (F|_{f_i} \Delta y_i - G|_{f_i} \Delta x_i), \quad (6)$$

sendo $\Delta y_i = v_{i2y} - v_{i1y}$ e $\Delta x_i = v_{i2x} - v_{i1x}$ de maneira que a ordem entre v_{i1} e v_{i2} é sempre mantida em relação à direção de \vec{PN}_i .

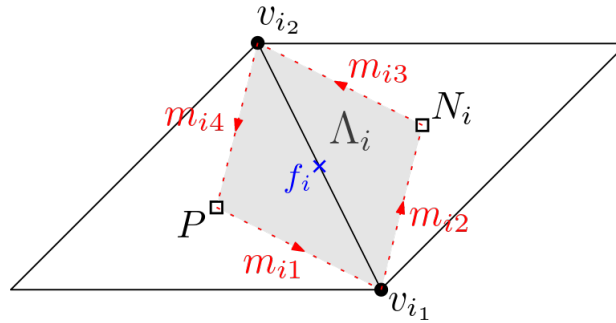


Figura 1: Ilustração do esquema utilizado para calcular o fluxo difusivo entre um volume e seu vizinho.

A seguir, deve-se calcular os termos F_{f_i} e G_{f_i} . Considerando que $F_{f_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x}|_{f_i}$, $G_{f_i} = \frac{\partial \phi}{\partial y}|_{f_i}$ e fazendo uma aproximação pela regra do ponto médio, tem-se:

$$F_{f_i} \approx \bar{F}_{f_i} = \frac{1}{|\Lambda_i|} \int_{\Lambda_i} F_{f_i} dA \quad e \quad G_{f_i} \approx \bar{G}_{f_i} = \frac{1}{|\Lambda_i|} \int_{\Lambda_i} G_{f_i} dA, \quad (7)$$

de forma que \bar{F}_{f_i} e \bar{G}_{f_i} representam os valores médios aproximados para F_{f_i} e G_{f_i} , respectivamente.

Fazendo uso do teorema da divergência de Gauss sobre a região sombreada $P - v_{i1} - N_i - v_{i2}$, denotada por Λ_i , pode-se avaliar os termos \bar{F}_{f_i} e \bar{G}_{f_i} no ponto f_i como:

$$\bar{F}_{f_i} = \frac{1}{|\Lambda_i|} \int_{\Lambda_i} \frac{\partial \phi}{\partial x} dA = \frac{1}{|\Lambda_i|} \oint_{\partial \Lambda_i} \phi dy \quad e \quad \bar{G}_{f_i} = \frac{1}{|\Lambda_i|} \int_{\Lambda_i} \frac{\partial \phi}{\partial y} dA = \frac{1}{|\Lambda_i|} \oint_{\partial \Lambda_i} \phi dx, \quad (8)$$

de tal modo que $\partial \Lambda_i$ denota o caminho $m_{i1} - m_{i2} - m_{i3} - m_{i4}$, com o sentido identificado pelas setas apresentadas no diagrama da Fig. 1. Definindo $\phi|_{m_{ik}}$ como sendo a média simples entre os valores de ϕ nos pontos que compõem cada segmento m_{ik} $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\Delta y_{m_{ik}}$ como a diferença entre as componentes y do vetor posição dos dois pontos que compõem o segmento m_{ik} (respeitando a convenção denotada pelo sentido da seta conforme Fig. 1), $\Delta x_{m_{ik}}$ seu análogo para a direção x e utilizando novamente a convenção de Einstein para somatórios, então:

$$F_{f_i} = \frac{1}{|\Lambda_i|} \phi|_{m_{ik}} \Delta y_{m_{ik}} \quad e \quad G_{f_i} = \frac{1}{|\Lambda_i|} \phi|_{m_{ik}} \Delta x_{m_{ik}} \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (9)$$

Substituindo a Eq. (9) na Eq. (6) e realizando algumas manipulações algébricas, a equação final discretizada pode ser escrita (novamente utilizando a convenção de soma) na seguinte forma:

$$a_P \phi_P + a_{N_i} \phi_{N_i} = a_{v_{P_i}} \phi_{v_{P_i}}, \quad (10)$$

sendo $\phi_{v_{P_i}}$ o valor de ϕ nos vértices que compõem o volume P (note que são os vértices denotados por v_{ij} na Fig. 1, mas não mais compreendidos em relação à face compartilhada e sim em relação ao triângulo P) e a_P , a_{N_i} e $a_{v_{P_i}}$ representando os escalares que aparecem multiplicando ϕ_P , ϕ_{N_i} e $\phi_{v_{P_i}}$, respectivamente. A forma em que a equação de discretização está mostrada na Eq. (10) é a forma canônica das discretizações por meio do MVF, tal como exposto por Patankar (1980). Ressalta-se que o termo do lado esquerdo é calculado implicitamente, enquanto que o termo do lado direito (dependente dos nós da malha) é avaliado explicitamente, e que a Eq. (10) é válida apenas para os triângulos internos, aqueles que não possuem nenhuma face localizada na borda $\partial\Omega$.

O lado direito da Eq. (10) é chamado de termo de difusão cruzada. Segundo Versteeg and Malalasekera (2007), este termo aparece em casos onde o vetor normal da face f_i não é paralelo ao vetor $\overrightarrow{PN_i}$, gerando uma parcela de fluxo tangente à esta face. Em malhas ortogonais este termo se anula, mas em malhas não ortogonais, a depender do grau de distorção do elemento, este termo pode se tornar muito significativo, introduzindo dificuldades para a convergência do sistema linear e instabilidades na ordem de convergência do método (Muzaferija (1994); Davidson and Stolcis (1995); Azevedo *et al.* (2010); Aftosmis *et al.* (1995)).

Os valores de ϕ nos CGs dos triângulos que possuem uma ou mais faces localizadas sobre $\partial\Omega$, ditos triângulos de borda, foram calculados por interpolação dos valores de ϕ nos seus vértices constituintes. Os valores $\phi_{v_{P_i}}$, por sua vez, foram obtidos empregando uma média ponderada entre os valores de ϕ nos CGs das células que compartilham determinado nó, sendo a distância nó-CG o fator de ponderação. Ademais, solucionou-se o sistema linear resultante da Eq. (10) pelo método de Gauss-Seidel com critério de parada $R_\infty \leq 10^{-9}$, com R_∞ definido por

$$R_\infty = \max[|R_P|] \quad P \in \{1, 2, \dots, C_D\} \quad (11)$$

sendo C_D o número de volumes de controle utilizados na discretização e R_P a P -ésima posição do vetor resíduo R .

2.2 Estudo experimental dos efeitos da distorção da malha na ordem de convergência do esquema apresentado

Define-se por distorção de um elemento de malha como o grau de afastamento de sua forma geométrica de sua referência equilátera, isto é, quão diferentes seus ângulos internos e lados são em relação a um polígono equilátero de mesmo número de arestas. Para os elementos triangulares, o caso ideal é o triângulo equilátero (Mazumder (2016); F. Moukalled (2016); Xue and Barton (2013)).

Diversas métricas para a qualidade de uma malha não estruturada triangular são encontradas na literatura, como por exemplo a apresentada em ANSYS (2008), que é mostrada pela Eq. (12), dada a seguir por:

$$D = \max \left[\frac{\theta_{\max} - 60}{180 - 60}, \frac{60 - \theta_{\min}}{60} \right], \quad (12)$$

em que D é o grau de distorção da célula e θ_{\max} e θ_{\min} são, respectivamente, o maior e o menor ângulo interno do elemento (em graus). O conjunto imagem desta equação é o intervalo $[0, 1]$, onde 0 representa um elemento equilátero (perfeito) e 1 um elemento totalmente distorcido.

Benkhaldoun *et al.* (2007) apontam que esquemas de reconstrução do gradiente nas faces baseados no uso do teorema da divergência de Gauss são de segunda ordem ($O(h^2)$) e podem ser aplicados sobre malhas não estruturadas com alto grau de distorção.

Leveque (2007) indica que todo processo de solução numérica de uma Equação Diferencial Parcial (EDP) possui um erro associado que condensa erros de discretização, arredondamento e truncamento. A ordem de convergência de um método numérico representa a taxa de decaimento deste erro com o refinamento da malha.

Para verificar a ordem de convergência do método aqui explicitado, desenvolveu-se um código computacional para solucionar uma EDPE com solução analítica conhecida, mostrada pela Fig. 2. O problema e o domínio foram adaptados de uma versão encontrada em Maliska (2004), uma vez que o problema tal como posto originalmente não permitia que o domínio fosse discretizado por elementos triangulares perfeitamente equiláteros.

Uma malha perfeitamente ortogonal foi obtida por meio da criação de uma sub-rotina de refinamento, cujo funcionamento é ilustrado pela Fig. 3. As malhas com 4, 16, 64, 256 e 1024 elementos geradas por esta metodologia foram submetidas a uma rotina para deformar o domínio deslocando-se o vértice inferior, originalmente na posição $(0.5, \frac{\sqrt{3}}{2})$, de modo que todos os elementos sofressem o mesmo deslocamento, culminando em um grau de distorção uniforme entre eles. Tal esquema de distorção dos elementos é ilustrado pela Fig. 4, e é interessante notar que o deslocamento deste vértice altera o domínio da EDP, mas tal alteração não modifica o problema em questão, uma vez que as condições de contorno e a solução analítica são as mesmas, fato que permite a comparação do efeito da distorção dos elementos entre os diversos problemas. Assim, cada uma das cinco malhas ortogonais foi distorcida de forma a gerar malhas com graus de distorção D iguais a 0.025, 0, 05, 0, 25 e 0.5. No total foram produzidas $5 \times 4 = 20$ malhas para a realização dos experimentos numéricos.

O procedimento empregado para a análise de convergência empírica do presente esquema de discretização é dado por Salari and Knupp (2000), e semelhante ao utilizado em Jacq (2014) e Zhiming and Jiming (2011). Primeiramente,

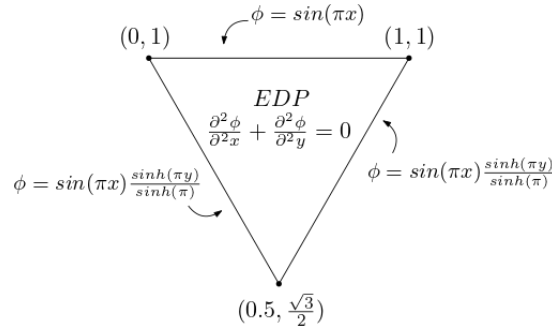


Figura 2: Problema proposto para o estudo da ordem de convergência do esquema de discretização apresentado. A solução exata para este problema, fornecida por Maliska (2004), é exatamente a equação descrita para as condições de contorno nas arestas diagonais

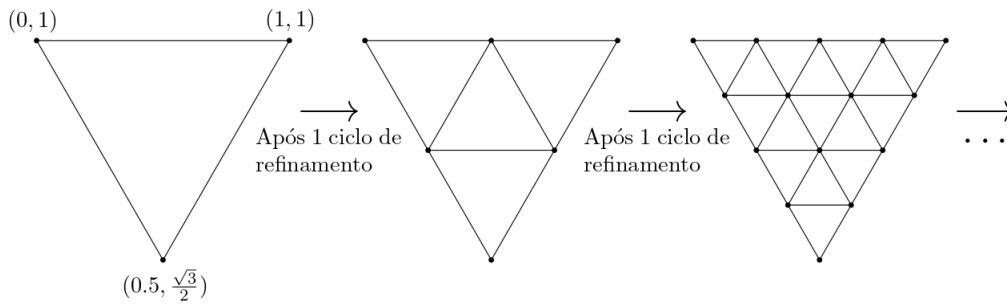


Figura 3: Estratégia utilizada para o refinamento da malha ortogonal. A partir do triângulo inicial denotado pelos seus respectivos vértices, cada ciclo de refinamento transforma cada triângulo da malha de entrada, denominado triângulo pai, em 4 triângulos filhos na malha de saída ao dividir ao meio cada aresta do triângulo pai

definiu-se uma constante que h_m representar a resolução da malha, assim:

$$h_m = \left(\frac{|\mathcal{D}|}{C_D} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

sendo $|\mathcal{D}|$ o módulo da área do domínio onde a EDPE é definida. Definindo como $\hat{\phi}_P^{h_m}$ a solução analítica avaliada no CG de um volume de controle qualquer P , de área $|\Omega_P|$ e que é parte de uma malha com resolução h , e $\phi_P^{h_m}$ como o valor obtido numericamente para este mesmo CG, pôde-se calcular os erros $E_2^{h_m}$ e $E_{RMS}^{h_m}$, baseados nas normas discretas L_2 e L_{RMS} , respectivamente dados por Burden *et al.* (2010) como:

$$E_2^{h_m} = \sqrt{\sum_{P=1}^{C_D} (\phi_P^{h_m} - \hat{\phi}_P^{h_m})^2 |\Omega_P|} \quad (14)$$

e

$$E_{RMS}^{h_m} = \sqrt{\frac{1}{C_D} \sum_{P=1}^{C_D} (\phi_P^{h_m} - \hat{\phi}_P^{h_m})^2}. \quad (15)$$

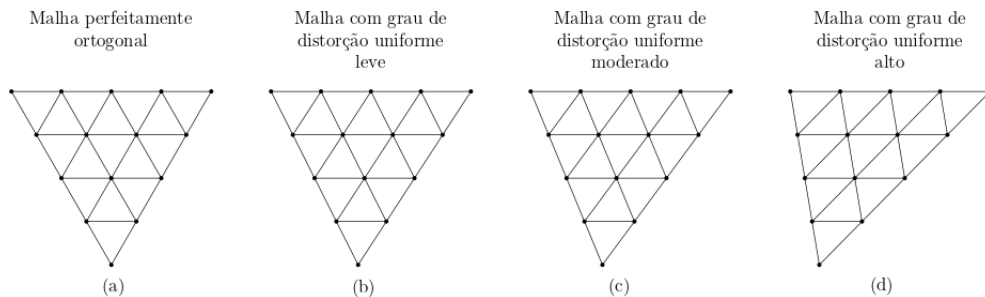


Figura 4: Ilustração do processo de distorção utilizado no presente trabalho. O grau de distorção obtido é proporcional ao deslocamento do vértice mais ao sul do domínio. Esta imagem é apenas ilustrativa

Jacq (2014) estima o erro assintótico para uma norma α por meio da equação

$$E_{\alpha}^{h_m} = C_{\alpha} h_m^{q_{\alpha}} + O(h_m^{q_{\alpha}+1}) \quad \forall \alpha \in \{2, RMS\}, \quad (16)$$

onde q_{α} denota a ordem do erro e C_{α} a constante de ordem de convergência, que independe de h_m . Tomando o erro assintótico de duas malhas com resoluções $h_{m2} \geq h_{m1}$ e manipulando algebricamente a Eq. (16), uma estimativa para a ordem de convergência do erro associado à cada solução foi obtida, tal aproximação é dada por:

$$q_{\alpha} = \frac{\log E_{\alpha}^{h_{m2}} - \log E_{\alpha}^{h_{m1}}}{\log h_{m2} - \log h_{m1}}. \quad (17)$$

De acordo com os procedimentos citados anteriormente, o problema descrito pela EDP exposta na Fig. 2 foi simulado com algoritmo desenvolvido para cada uma das malhas propostas, com resoluções h_m e graus de distorção D variados. Os dados coletados de cada experimento podem ser conferidos na Tab. 1, exposta na seção adiante.

3. RESULTADOS

Os resultados obtidos pela metodologia expressa acima podem ser observados em detalhe na Tab. 1. A Fig. 5 apresenta dois gráficos, um da solução numérica para o problema resolvido com uma malha ortogonal, $D = 0$, e outro para a distribuição do Erro Relativo Percentual (ERP) entre o resultado numérico e os valores previstos pela solução analítica.

A hipótese sobre a ordem de convergência levantada por Benkhaldoun *et al.* (2007) se mostrou verdadeira para o caso em que o problema foi resolvido em um domínio discretizado pela malha perfeitamente ortogonal, com $D = 0$. Observa-se pelos dados da Tab. 1 que, para este caso, a ordem de convergência $q \rightarrow 2$ quando $h \rightarrow 0$ para as duas normas analisadas: qE_2 e qE_{RMS} . Os fatores *Quociente* E_2 e *Quociente* E_{RMS} corroboram com a hipótese, uma vez que a razão entre os erros E_2 e E_{RMS} para $h = 0,0411$ e $h = 0,0206$ tornam-se muito próximos de 4, indicando que ao dividir h pela metade, o erro associado à discretização cai por um fator de $(1/2)^2$. Portanto, o método se mostra sendo de segunda ordem $O(h^2)$.

A Fig. 5 mostra que a solução numérica é consistente em relação à solução analítica. O ERP máximo é da ordem de 1%, o que representa boa precisão. Contudo, assim como observado por Davidson and Stolcis (1995), Aftosmis *et al.* (1995) e Azevedo *et al.* (2010), a ordem de convergência foi consideravelmente afetada pelo grau de distorção das malhas utilizadas, que originam e impulsionam o termo de difusão cruzada. Tal efeito pôde ser percebido mesmo nas malhas com grau de distorção $D = 0,025$. Para estas, as ordens de convergência nas duas normas já são bem menores que 1. Este fato se acentua nas malhas mais distorcidas, chegando em uma razão entre os erros das malhas mais finas próxima de 1, sinalizando uma melhora tímida no resultado da solução numérica, mas que é computacionalmente custosa, como pode-se notar pelo acréscimo de cerca de 15% no número de iterações necessárias para atingir o critério de convergência do Gauss-Seidel em relação ao caso ótimo.

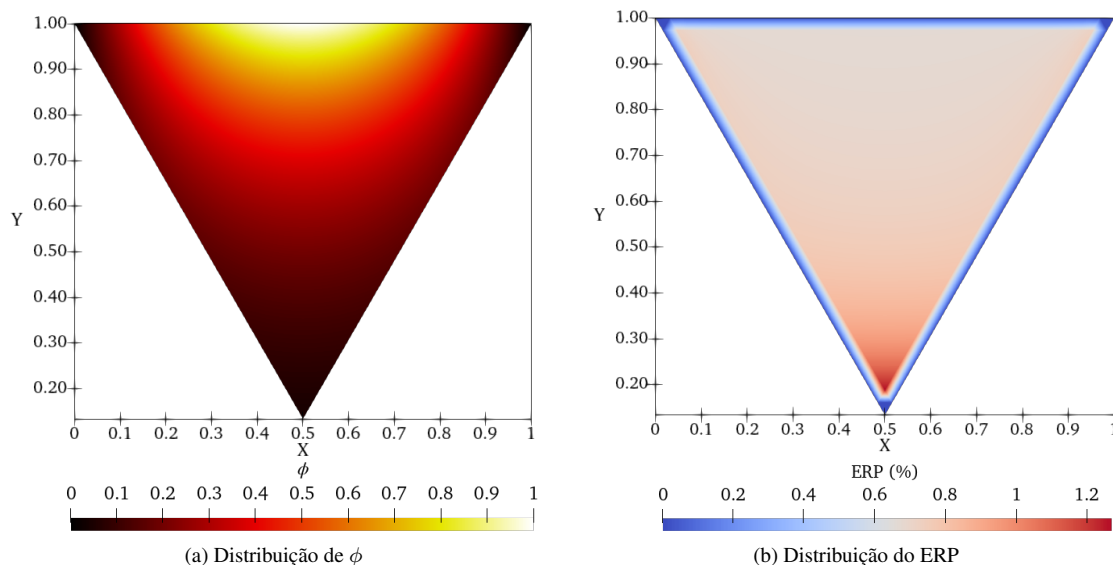


Figura 5: Gráficos da solução numérica e do Erro Relativo Percentual (ERP) em relação à solução analítica para o problema em estudo. Os valores ilustrados foram obtidos para a malha com $h = 0,0206$ e $D = 0$

Tabela 1: Tabela com os dados coletados pelas simulações do problema proposto na Fig. 2 para malhas com diferentes resoluções h e fatores de distorção D .

D = 0								
N° de elementos	Iterações	h	E₂	E_{RMS}	Quociente E₂	Quociente E_{RMS}	qE₂	qE_{RMS}
4	8	0,3290	0,0751	0,1142	**	**	**	**
16	35	0,1645	0,0300	0,0456	2,5066	2,5044	1,3257	1,3245
64	142	0,08225	0,0082	0,0125	3,6538	3,6480	1,8694	1,8671
256	540	0,0411	0,0021	0,0032	3,9193	3,9063	1,9706	1,9658
1024	2004	0,0206	0,0005	0,0008	3,9667	4,0000	1,9880	2,0000
D = 0,025								
N° de elementos	Iterações	h	E₂	E_{RMS}	Quociente E₂	Quociente E_{RMS}	qE₂	qE_{RMS}
4	2	0,3202	0,0821	0,1282	**	**	**	**
16	35	0,1601	0,0424	0,0661	1,9376	1,9376	0,9543	0,9543
64	142	0,0800	0,0197	0,0308	2,1454	2,1454	1,1013	1,1013
256	541	0,0400	0,0124	0,0194	1,5930	1,5930	0,6718	0,6718
1024	2009	0,0200	0,0101	0,0157	1,2326	1,2326	0,3017	0,3017
D = 0,050								
N° de elementos	Iterações	h	E₂	E_{RMS}	Quociente E₂	Quociente E_{RMS}	qE₂	qE_{RMS}
4	2	0,3123	0,0878	0,1405	**	**	**	**
16	35	0,1561	0,0527	0,0843	1,6665	1,6665	0,7369	0,7368
64	142	0,0781	0,0294	0,0470	1,7940	1,7940	0,8432	0,8432
256	523	0,0390	0,0210	0,0336	1,3981	1,3981	0,4834	0,4834
1024	2017	0,0195	0,0180	0,0289	1,1647	1,1647	0,2199	0,2199
D = 0,25								
N° de elementos	Iterações	h	E₂	E_{RMS}	Quociente E₂	Quociente E_{RMS}	qE₂	qE_{RMS}
4	2	0,3290	0,1147	0,2294	**	**	**	**
16	36	0,1250	0,1061	0,2121	1,0814	1,0814	0,0808	0,0808
64	151	0,0625	0,0795	0,1590	1,3346	1,3346	0,4164	0,4164
256	582	0,0313	0,0665	0,1330	1,1948	1,1948	0,2568	0,2568
1024	2177	0,0156	0,0606	0,1213	1,0971	1,0971	0,1337	0,1337
D = 0,50								
N° de elementos	Iterações	h	E₂	E_{RMS}	Quociente E₂	Quociente E_{RMS}	qE₂	qE_{RMS}
4	2	0,3290	0,1147	0,2294	**	**	**	**
16	36	0,1250	0,1094	0,2112	1,0486	1,0864	0,0491	0,0856
64	159	0,0625	0,0844	0,1561	1,2953	1,3523	0,3733	0,4354
256	614	0,0313	0,0780	0,1304	1,0832	1,1973	0,1153	0,2598
1024	2296	0,0156	0,0762	0,1188	1,0228	1,0974	0,0325	0,1341

4. CONCLUSÃO

A partir dos resultados apresentados, pode-se concluir que a formulação apresentada é capaz de resolver EDPEs em domínios discretizados por malhas não estruturadas triangulares, podendo atingir a ordem de convergência teórica $O(h^2)$. Entretanto, apesar de ser bem sabido na literatura que a qualidade da malha influencia a precisão dos resultados e aumenta o custo computacional para obtê-los, a metodologia utilizada também se mostrou desfavoravelmente sensível ao índice de distorção, de tal forma que a ordem de convergência fora consideravelmente menor do que o caso ideal. Estes resultados indicam a necessidade de uma investigação aprofundada para compreender a natureza desta sensibilidade, bem como propor aprimoramentos que permitam um melhor tratamento do termo de difusão não ortogonal.

5. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

6. REFERÊNCIAS

- Aftosmis, M., Gaitonde, D. and Tavares, T.S., 1995. “Behavior of linear reconstruction techniques on unstructured meshes”. *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 11, pp. 2038–2049. doi:10.2514/3.12945.
- ANSYS, I., 2008. *Ansys® Fluent User’s Guide, Release 12.1*.
- Azevedo, J.L.F., Figueira da Silva, L.F. and Strauss, D., 2010. “Order of accuracy study of unstructured grid finite volume upwind schemes”. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 32, pp. 78–93.
- Bassanezi, R.C. and Junior, W.C.F., 1988. *Equações Diferenciais com aplicações*. Harbra.
- Benkhaldoun, F., Elmahi, I. and Sear’d, M., 2007. “Well-balanced finite volume schemes for pollutant transport by shallow water equations on unstructured meshes”. *Journal of Computational Physics*, Vol. 226, No. 1, pp. 180–203. ISSN 0021-9991. doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.04.005. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999107001490>.
- Boyce, W.E., DiPrima, R.C. and Meade, D.B., 2017. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, 11th edition. ISBN 1119382874 9781119382874.
- Burden, R., Faires, J. and Burden, A., 2010. *Numerical analysis: Cengage Learning*. Brooks/Cole, 9th edition.
- Chapra, S.C. and Canale, R.P., 2011. *Numerical methods for engineers*. Mcgraw-hill New York, 5th edition.
- Davidson, L. and Stolcis, L., 1995. *An efficient and stable solution procedure of compressible turbulent flow on general unstructured meshes using transport turbulence models*. doi:10.2514/6.1995-342.
- F. Moukalled, L. Mangani, M.D., 2016. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab*. Fluid Mechanics and Its Applications 113. Springer. ISBN 3319168738, 9783319168739.
- Fortuna, A.d.O., 2000. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*. Edusp.
- Jacq, P., 2014. *Finite Volume methods on unstructured grids for solving anisotropic heat transfer and compressible Navier-Stokes equations*. Ph.D. thesis, Université de Bordeaux. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01067707>.
- Leveque, R., 2007. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems (Classics in Applied Mathematics)*. Classics in Applied Mathematics. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN 0898716292,9780898716290.
- Majumdar, P., 2005. *Computational Methods for Heat and Mass Transfer*. Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and. CRC Press, 1st edition. ISBN 978-1-56032-994-7,978-1-4398-9440-8,1560329947.
- Maliska, C.R., 2004. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. LTC Editora, Rio de Janeiro, 2nd edition. ISBN 9780891165224,0891165223.
- Mazumder, S., 2016. *Numerical Methods for Partial Differential Equations. Finite Difference and Finite Volume Methods*. Academic Press, 1st edition. ISBN 0128498943,978-0-12-849894-1.
- Muzaferija, S., 1994. *Adaptive finite volume method for flow prediction using unstructured meshes and multigrid approach*. Ph.D. thesis, University of London UK.
- Özişik, M.N., Orlande, H.R., Colaco, M.J. and Cotta, R.M., 2017. *Finite difference methods in heat transfer*. CRC press.
- Patankar, S., 1980. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Series on Computational Methods in Mechanics and Thermal Science. Taylor Francis, 1st edition. ISBN 9780891165224,0891165223.
- Salari, K. and Knupp, P., 2000. “Code verification by the method of manufactured solutions”. *Sandia National Laboratories*. doi:10.2172/759450. URL <https://www.osti.gov/biblio/759450>.
- Strauss, W.A., 2008. *Partial Differential Equations*. Wiley. ISBN 9780470054567,9781118313169,111831316X.
- Versteeg, H.K. and Malalasekera, W., 2007. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Pearson, paperback edition. ISBN 0131274988,9780131274983.

- Xue, S.C. and Barton, G., 2013. “A finite volume formulation for transient convection and diffusion equations with unstructured distorted grids and its applications in fluid flow simulations with a collocated variable arrangement”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 253, pp. 146–159.
- Zhiming, G. and Jiming, W., 2011. “A linearity preserving cell-centered scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion equations on general meshes”. Research report. URL <https://hal.inria.fr/inria-00481112>.

7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.