



XXVIII CREEM

Congresso Nacional de Estudantes
de Engenharia Mecânica
Santa Maria - RS



XXVIII Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica
09 a 13 de maio de 2022, Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil

Análise da influência de modelos de atrito na dinâmica torcional de uma coluna de perfuração com *stick-slip*

Daniel Cantanhede Esteves Escalhão, daniel.escalhao@aluno.puc-rio.br¹

Roberta Lima, robertalima@puc-rio.br¹

¹Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 22451-900

Resumo. Colunas de perfuração de poços de petróleo são estruturas esbeltas submetidas a diferentes tipos de ações dinâmicas em sua operação. O objetivo desse trabalho é modelar a dinâmica torcional de uma coluna, considerando a ação de um motor rotativo no topo da coluna e de atrito-seco entre a broca e o solo. Assim, o topo da coluna tem velocidade constante imposta pelo motor e base está sujeita a um torque devido a presença do atrito-seco. Por causa desse atrito, o movimento resultante da coluna pode ser caracterizado por dois modos qualitativamente diferentes, os modos *stick* e *slip*, com uma transição abrupta. A dinâmica da coluna foi modelada matematicamente usando a teoria de eixos e a coluna foi discretizada utilizando elementos finitos. Programas Matlab foram desenvolvidos para simulações numéricas. Diferentes modelos de atrito foram utilizados para analisar-se sua influência na dinâmica do sistema.

Palavras chave: Dinâmica torcional. Atrito-seco. *stick-slip*. Duração de *stick*. Elementos finitos

Abstract. Oil well drill string are slender structures subjected to different dynamic actions in their operation. The objective of this work is to model the torsional dynamics of a drill string, considering the action of a rotary engine at the top of the column and dry-friction between the drill bit and the soil. In this way, the top of the column has a constant speed imposed by the motor and the base is subjected to a torque due to the presence of dry-friction. Because of this friction, the resulting movement of the column can be characterized by two qualitatively different modes, *stick* and *slip* modes, with an abrupt transition. The column dynamics was mathematically modeled using axis theory and the column was discretized using the finite elements method. Matlab programs were developed for numerical simulations. Different friction models were used to analyze their influence on the dynamics of the system.

Keywords: Torsional dynamics. Dry-friction. *stick-slip*. *stick* duration. Finite elements method

1. INTRODUÇÃO

A indústria de óleo e gás mantém atualmente grande importância financeira e operacional, tendo como uma de suas principais operações a excevação de poços para extração de petróleo. Esse processo é realizado com colunas de perfuração. No processo de perfuração, as colunas estão sujeitas a vibrações que, caso não controladas, podem encarecer a operação reduzindo a eficiência da perfuração ou até causar danos materiais à coluna. Essas vibrações são causadas pela interação da coluna com o solo e ocorrem nos três sentidos da estrutura: torcional, longitudinal e lateral.

Este trabalho se concentra em analisar a influência de diferentes modelos de atrito-seco em vibrações torcionais de uma coluna de perfuração. A coluna é uma estrutura esbelta e vertical. Em uma extremidade se conecta a uma broca que interage com o solo e na outra extremidade se conecta a um motor que impõe uma velocidade de rotação constante, como descrito em (Monteiro and Trindade, 2017). A combinação desses fatores provoca uma dinâmica chamada *stick-slip*. Nessa dinâmica, o movimento resultante da coluna pode ser caracterizado por dois modos qualitativamente diferentes, os modos *stick* e *slip*, com uma transição abrupta. Durante a fase *stick*, o atrito na broca trava o fundo da coluna durante um intervalo de tempo com duração não nula. Como no topo da coluna uma velocidade de rotação constante continua a ser imposta pelo motor, a estrutura sofre torção e vai acumulando energia elástica torcional. Durante a fase *stick* os torques atuantes na broca se equilibram, ou seja, o torque gerado pela força de atrito-seco aumenta na mesma proporção que o torque gerado pela torção elástica. A fase *stick* dura enquanto esses dois torques se equilibram. Como a força de atrito não cresce indefinidamente, ela satura e então deixa-se de ter equilíbrio de torques na broca. Nesse instante, a broca começa a se mover e inicia-se uma fase *slip*.

Na literatura, diferentes modelos de atrito-seco são utilizados na modelagem de dinâmica de colunas de perfuração. Destaca-se o modelo de Coulomb (Lima and Sampaio, 2017), um dos modelos mais simples. O objetivo desse trabalho é analisar e comparar a influência de diferentes modelos de atrito na dinâmica torcional de uma coluna. Uma das variáveis de interesse analisadas é a duração dos *sticks*.

2. DINÂMICA DE EIXOS

Neste trabalho, a coluna de perfuração foi modelada como um eixo esbelto homogêneo de comprimento L e seção cilíndrica constante. A Fig. 1 exemplifica um eixo na horizontal, sendo $\theta(x, t)$ e $m(x, t)$ a deslocamento angular e momento por unidade de comprimento atuante no ponto x no instante t , respectivamente.

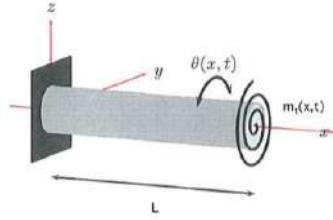


Figura 1: Eixo unidimensional

2.1 Formulação forte

A formulação teórica do problema segue o recomendado por Sampaio *et al.* (2007) e Innman (2014), desenvolvendo a dinâmica a partir de um elemento finito do corpo e considerando a Lei de Hooke para um material elástico e linear de módulo de elasticidade constante G . Podemos descrever a dinâmica do corpo pela Eq. 1 e pelas condições de contorno próprias para cada problema diferente tratado, no nosso caso as da Eq. 2, dadas por:

$$\rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(x, t) - GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x, t) = m(x, t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) = 0, \quad (2)$$

onde $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ é a deformação angular, ρ a densidade do material e J o momento polar de inércia. Considera-se que $\frac{\partial \theta}{\partial t}(0, t) = \omega$, onde ω a velocidade angular constante imposta pelo motor no topo da coluna.

2.2 Formulação fraca

O Método de Elementos Finitos apresenta uma técnica de discretização de um problema descrito na formulação fraca. A partir dessa discretização, uma aproximação para sua solução pode ser obtida, por exemplo, através do método de Galerkin.

A discretização do problema de eixos implica na divisão do meio contínuo do eixo em elementos discretos, transformando a equação diferencial parcial, válida para cada ponto do domínio contínuo, em um conjunto de equações diferenciais ordinárias. As variações entre dois elementos consecutivos são tratadas por funções de interpolação, também chamadas de funções aproximantes. Para propósito desse trabalho, o problema discretizado será de uma barra livre-livre com torque concentrado na extremidade final.

Para obter-se a formulação fraca da dinâmica, iniciamos pela multiplicação da Eq. 1 por uma função-teste $\psi(x) \in Adm$, sendo Adm o espaço das funções-teste que satisfazem as condições de contorno do problema segundo Hughes (1987). A expressão é então integrada no domínio, no caso da barra unidimensional de 0 a L . Após uma simplificação por integração por partes, obtemos a Eq. 3 dada por:

$$\int_0^L \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L GJ \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx = \int_0^L m(x, t) \psi(x) dx. \quad (3)$$

Para se obter uma aproximação para a solução do problema, será utilizado o Método de Galerkin sugerido por (Dukkipati (2000)), que busca uma aproximação para a função θ da forma:

$$\theta_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) y_i(t), \quad (4)$$

onde y_i são coeficientes a serem determinados, e ϕ_i são funções base do Adm linearmente independentes e previamente dedinidas. São utilizados n elementos e, por consequência, $n + 1$ nós. No método de Galerkin, a base de projeção é a

mesma base usada para aproximar θ , então temos $\phi_i = \psi_i$. Substituindo-se isso na Eq. 3, podemos reescrever a Eq. 3 como um conjunto de n equações. Para cada uma delas pode-se escrever:

$$\sum_{i=1}^n \ddot{y}_i \int_0^L \rho J \phi_i \phi_h dx + \sum_{i=1}^n y_i \int_0^L GJ \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_h}{dx} dx = \int_0^L m(x, t) \phi_h dx, \quad h = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Representa-se por:

$$j_{hi} = \int_0^L \rho J \phi_i \phi_h dx, \quad (6)$$

$$k_{hi} = \int_0^L GJ \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_h}{dx} dx, \quad (7)$$

$$\tau_h = \int_0^L m(x, t) \phi_h dx. \quad (8)$$

Assim, o conjunto das equações dado em Eq. 5 pode ser expresso em forma matricial:

$$\mathbf{J}\{\ddot{y}\} + \mathbf{K}\{y\} = \{T\} \quad (9)$$

As matrizes \mathbf{J} e \mathbf{K} são chamadas de matrizes de massa e rigidez globais do problema e, o vetor $\{T\}$ de vetor de torque global.

Observando as Eqs. 6, 7 e 8, percebe-se que para obter cada elemento das matrizes globais \mathbf{J} e \mathbf{K} é necessário integrar as funções base ϕ_i em todo o domínio do problema. Para simplificar esse cálculo, uma escolha apropriada de funções ϕ_i pode ser feita, de tal forma que as funções e suas derivadas só sejam diferentes de zero em apenas uma pequena parte do domínio. Assim, a integral precisa ser calculada somente nessa parte do domínio onde a função é diferente de zero e, consequentemente as matrizes globais \mathbf{J} e \mathbf{K} se tornam matrizes esparsas. A ideia básica é discretizar domínio do problema em um conjunto de subdomínios, chamados elementos. A fronteira de cada elemento é delimitada por pontos (chamados nós). Com a discretização do domínio, a montagem das matrizes globais é feita através de matrizes elementares $\mathbf{J}^{(e)}$ e $\mathbf{K}^{(e)}$ calculadas em cada elemento do problema. Como a forma das funções base ϕ_i é igual para todos os elementos, faz-se uma mudança das coordenadas globais para coordenadas elementares. Assim, no cálculo das matrizes elementares, as funções ϕ_i são descritas em coordenadas locais. Considera-se que cada elemento se estende de $\zeta = -1$ a $\zeta = 1$. Para uma aproximação linear, cada elemento é formado por dois nós. Nesse caso, as matrizes elementares são 2×2 . As matrizes globais são construídas com uma assemblagem das matrizes elementares. Serão de tamanho $(n + 1) \times (n + 1)$, sendo n o número de elementos utilizados na discretização do domínio (de Castro Pessoa, 2020).

3. MODELOS DE ATRITO SECO

O sistema foi modelado considerando a atuação da força de atrito apenas no último elemento da coluna, ou seja, o valor referente à força de atrito em cada instante é representado pelo último componente do vetor de torques T . Os modelos de atrito comparados foram os modelos de Coulomb e de Benson (Pennestri *et al.* (2016)), variando com a velocidade relativa entre duas superfícies em contato, no caso de estudo, a broca e o solo.

O modelo de Coulomb clássico se encontra representado à esquerda da Fig. 2, considerando que com velocidade relativa nula a força de atrito pode assumir infinitos valores entre o máximo F_d e o mínimo $-F_d$. Esse modelo representa a relação do atrito e da velocidade como não-funcional. O gráfico à direita da figura mostra uma simplificação comum que torna o modelo funcional determinando que para velocidades relativas próximas de 0, o atrito se comporta de forma linear.

O segundo modelo utilizado considera que o módulo da força de atrito estática ultrapassa o da força de atrito dinâmica, sendo que essa transição pode ocorrer discontinuamente como no caso do gráfico da esquerda da Fig. 3 ou através de um decaimento exponencial, como no gráfico à direita da mesma figura. Nenhum desses modelos é funcional, então serão descritos nas seções seguintes apenas como Benson clássico e exponencial.

No modelo Benson exponencial considera-se:

$$F(v) = -F_d - (F_s - F_d) e^{|v|} \operatorname{sgn}(v), \quad \text{para } v \neq 0, \quad (10)$$

onde v é a velocidade relativa entre a broca e o solo.

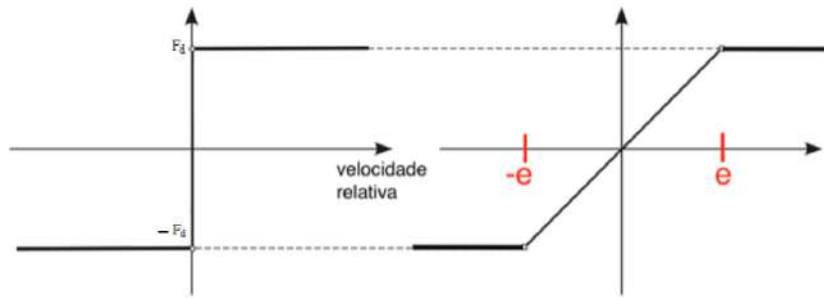


Figura 2: Modelos de atrito de Coulomb

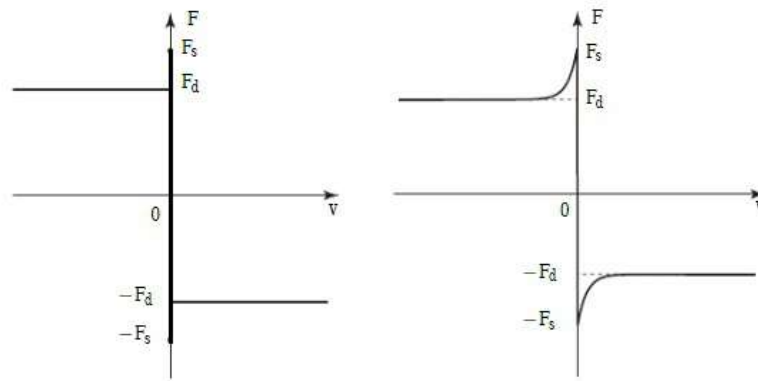


Figura 3: Modelos de atrito de Benson

4. APLICAÇÃO NUMÉRICA

Para integrar a Eq. 9, deve-se reduzir a EDO à primeira ordem introduzindo o vetor de estado s :

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \implies \{\dot{s}\} = \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Com isso, considerando a matriz de inércia \mathbf{J} inversível, podemos reescrever a Eq. 9 como:

$$\{\ddot{y}\} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}\{y\} + \mathbf{J}^{-1}\{T\} \implies \{\dot{s}\} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{K} & 0 \end{bmatrix} \{s\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{J}^{-1}T \end{Bmatrix} \quad (12)$$

A integração do sistema de equações ocorreu através da função *ode45* do Matlab, que utiliza uma fórmula explícita do método de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem, como descrito em Dormand and Prince (1980) e Shampine and Reichelt (1997). As simulações numéricas foram realizadas no Matlab, sendo que como critério de avaliação entre os diferentes modelos de atrito foi utilizado, além do aspecto visual da evolução temporal de posição e velocidade do último elemento da coluna, as durações dos intervalos de tempo em que a estrutura permaneceu no estado *stick*. Essa escolha se deu tendo em vista que quanto maior as durações dos *sticks* da estrutura, menos eficiente seria a operação de perfuração. Foi criada uma variável de análise denominada T_{stick} , que representa o somatório da duração de todos os intervalos em que o sistema permaneceu em *stick* dividido pela duração total de simulação. Na Fig. 4 se encontra um exemplo de sequência das fases *stick* e *slip* na resposta do sistema, sendo que a variável de análise nesse caso seria a soma de D_1 à D_{S_T} dividido por t_a , onde t_a é o instante final do intervalo de tempo de integração da dinâmica e S_T o número de fases de *stick* que ocorrem nesse intervalo.

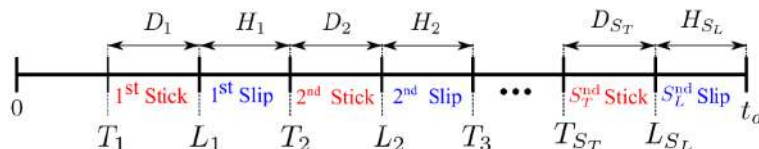


Figura 4: Sequência das fases *stick* e *slip* na resposta da coluna.

No caso do modelo funcional, para cada instante, a determinação de qual estado a coluna se encontra, *stick* ou *slip*, é realizada checando se o módulo da velocidade relativa é maior do que o módulo da variável e . No caso dos modelos não funcionais, além dessa verificação, é necessário verificar se a força elástica atuante no último elemento excede em módulo a força de saturação F_s . No caso simplificado com um único grau de liberdade, representado na Fig. 5 adaptada de Lima and Sampaio (2015), essa força elástica é representada pelo produto kx e a força de atrito dinâmica pelo produto da constante de atrito μ pela normal N exercida pelo peso do bloco de massa m . Como pode ser observado nas Figs. 2 e 3, no modelo de Coulomb essa força de saturação é igual à força de atrito dinâmico F_d , atuante no último elemento na fase *slip*. Já nos modelos de Benson, a força de saturação excede a força dinâmica. Portanto, no caso simplificado de um grau de liberdade com o modelo de atrito de Coulomb, a força elástica kx deve exceder o módulo da de saturação μN para que a dinâmica passe da fase *stick* para *slip*.

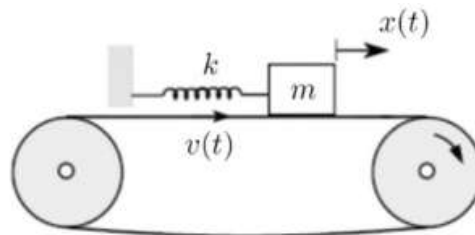


Figura 5: Oscilador *stick-slip* com 1 grau de liberdade

4.1 Análise de convergência

As simulações do problema modelado precisam ser avaliadas quanto à sua convergência baseado em três parâmetros principais: o número de elementos utilizados na discretização; o tamanho do passo temporal utilizado na integração e o tamanho da margem caracterizada pela variável e presente na Fig. 2. Este último parâmetro não foi apenas utilizado no modelo de Coulomb funcional, mas também nos outros modelos como uma margem de erro admissível na comparação entre a velocidade relativa entre a broca e o solo e o valor zero para determinar se o sistema está na fase *stick*. Como em uma simulação numérica o valor da velocidade relativa praticamente nunca será estritamente igual à 0, sem essa margem de erro o sistema nunca atenderia as condições necessárias para estar em *stick*. Com a margem de erro, permite-se afirmar que o sistema está em *stick* quando a velocidade relativa entre a broca e o solo estiver dentro da margem. Quanto menor for o valor de e , mais precisa serão as previsões dos instantes de início de *stick*. O mesmo pode-se dizer em relação ao tamanho do passo temporal utilizado na integração numérica. Quanto menor for o valor de Δt , mais precisa serão as previsões dos instantes de início de *stick*.

A Tab. 2 representa a análise realizada considerando o número de elementos utilizados na discretização no modelo de atrito de Coulomb funcional. Essa análise também foi realizada para os modelos não funcionais, como exemplificado na Tab. 3 que explicita apenas o modelo de Coulomb não funcional. Foi considerada uma velocidade imposta pelo motor rotativo $\omega = 3 \text{ rad/s}$ para a análise de convergência e para as simulações finais presentes na próxima seção, assim como as informações sobre a geometria da coluna encontradas na Tab. 1.

Tabela 1: Parâmetros utilizados nas simulações

Parâmetro	Valor	Unidade	Descrição
L	500	m	comprimento da coluna
J	0.0037	m ⁴	momento polar de inércia
G	77	GPa	módulo de cisalhamento
ρ	7850	kg.m ⁻³	densidade
F_d	1500	kN	força de atrito
F_s	2100	kN	força de atrito

A análise de convergência do passo temporal Δt e da margem e se encontram dispostos nas Tabelas 4 e 5. É importante ressaltar que nas análises de convergência apresentadas, as variáveis foram analisadas separadamente. Isto quer dizer que, para analisar a influência do passo de tempo, por exemplo, foi utilizado um número menor de elementos do que o convergente e uma margem e maior para economizar tempo de processamento. Foram fixados para todas as simulações realizadas para análise de convergência um número de elementos $n = 30$, um passo temporal $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ e uma margem $e = 0.01$. Com esses valores fixos, variou-se um a um separadamente para realizar as análises. A única exceção foi na análise da margem e , onde o número de elementos foi reduzido à 10 para economizar tempo de simulação.

Tabela 2: Convergência por número de elementos no modelo de Coulomb funcional

Núm. de elementos	Tstick (%)	Tempo de execução (s)
5	18.82	17
10	17.16	37
15	16.96	53
20	16.66	91
25	16.68	126
30	16.56	176
35	16.50	373
40	16.36	420
45	16.44	485
50	16.44	708

Tabela 3: Convergência por número de elementos no modelo de Coulomb não funcional

Núm. de elementos	Tstick (%)	Tempo de execução (s)
5	18.24	44
10	16.98	61
15	16.84	78
20	16.46	99
25	16.56	130
30	16.42	153
35	16.44	313
40	16.32	375
45	16.32	378

Tabela 4: Convergência por passo temporal no modelo de Coulomb funcional

Δt (s)	Tstick (%)	Tempo de execução (s)
0.1	16	160
0.01	16.60	164
0.001	16.56	164
0.0001	16.52	165
0.00001	16.53	168

Tabela 5: Convergência por tamanho de margem no modelo de Coulomb funcional

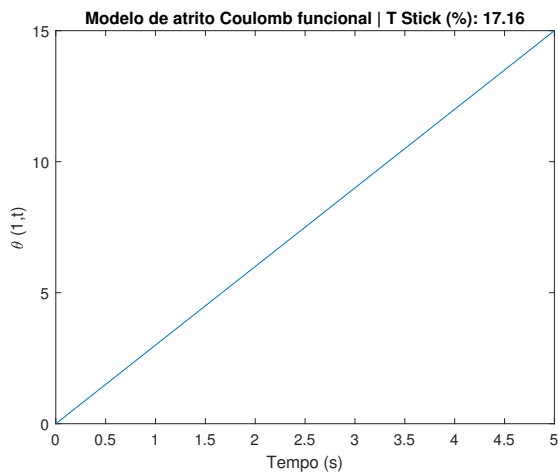
Margem e	Tstick (%)	Tempo de execução (s)
0.1	17.1	16
0.01	16.56	164
0.001	15.98	1872
0.0001	15.96	5385

5. RESULTADOS

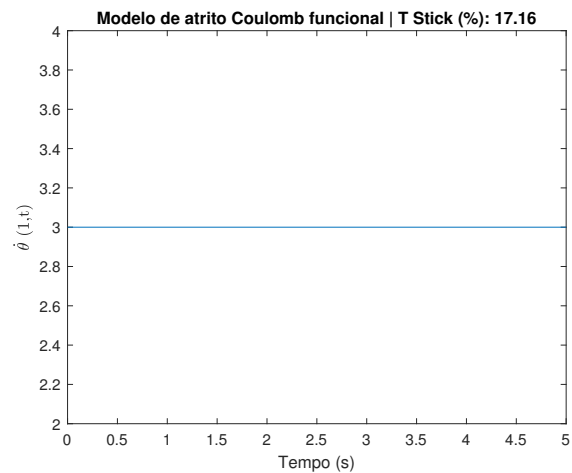
Foram utilizados 40 elementos na discretização para as simulações numéricas e $e = 0.01$ para a margem, sendo esses valores baseados no estudo de convergência descrito anteriormente para garantir a precisão desejada e um tempo de execução razoável. A equação da dinâmica da coluna discretizada por elementos finitos foi integrada usando-se o método de Runge-Kutta em um intervalo de tempo $[0, 5]$ s com um passo de tempo $\Delta t = 10^{-3}$ s. Considerou-se para condições iniciais que a coluna toda tinha velocidade nula, com exceção do primeiro elemento que tinha velocidade imposta ω , ou seja, $\frac{\partial \theta}{\partial t}(0, x) = 0$, e $\theta(0, x) = 0$, $\forall x \in (0, L]$.

Primeiramente, buscou-se analisar a posição e velocidade do primeiro elemento, onde é possível verificar uma manutenção de velocidade constante induzida pelo motor que leva à uma evolução linear da posição do elemento. A Fig. 6 representa a evolução da posição (à direita) e da velocidade (esquerda) no primeiro elemento. A figura também informa o percentual do tempo de operação em que ocorreu o *stick* para o modelo de Coulomb funcional.

No último elemento, onde atua a força de atrito, pode-se analisar a ocorrência de *stick-slip* na dinâmica. Utilizando o



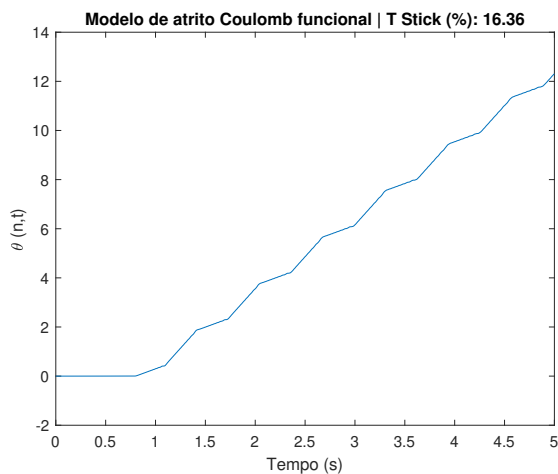
(a) Evolução da posição no primeiro elemento



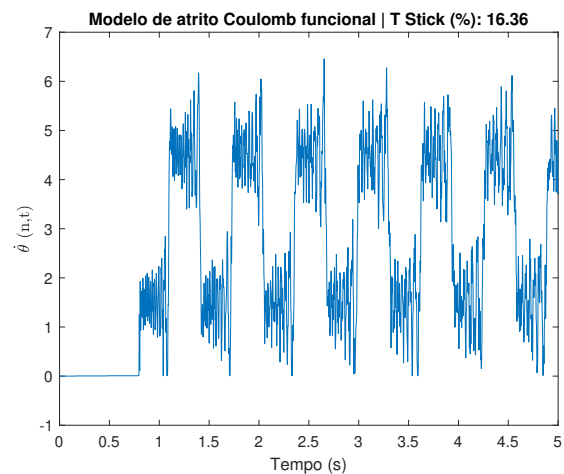
(b) Evolução da velocidade no primeiro elemento

Figura 6: Evolução temporal no primeiro elemento

modelo de atrito de Coulomb com a simplificação linear, obtiveram-se os gráficos da Fig. 7, que representam a posição e velocidade no último elemento. Pode-se observar um grande trecho inicial com velocidade nula e a evolução da posição com ocorrência de fases de *stick* e de *slip*.



(a) Evolução da posição no último elemento



(b) Evolução da velocidade no último elemento

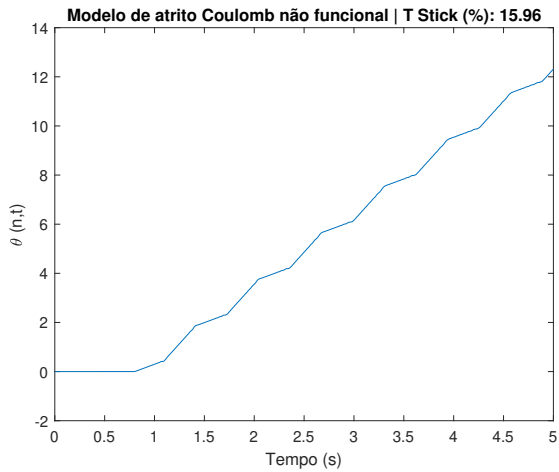
Figura 7: Evolução temporal no último elemento no modelo de Coulomb funcional

A Fig. 9 representa a mesma evolução temporal para o último elemento, mas considerando o modelo de Benson clássico. A Fig. 10 representa a mesma evolução no modelo de decaimento exponencial.

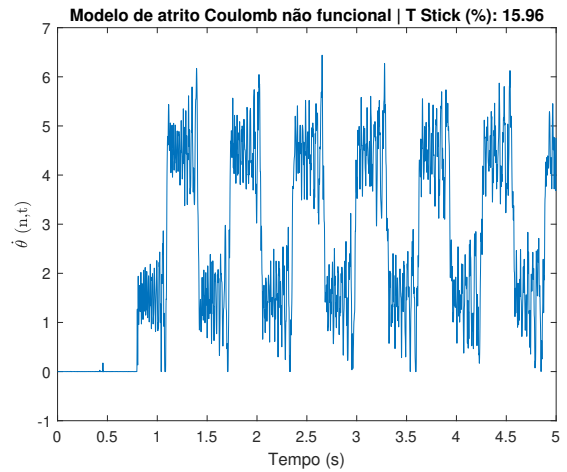
Os resultados de tempos de *stick* se encontram resumidos na Tab. 6, que apresenta os tempos obtidos e os respectivos modelos de atrito associados.

Tabela 6: Tstick (%) obtido em cada modelo de atrito

Modelo de atrito	Tstick (%)
Coulomb funcional	17.16
Coulomb não funcional	15.96
Benson clássico	6.20
Benson exponencial	22.74

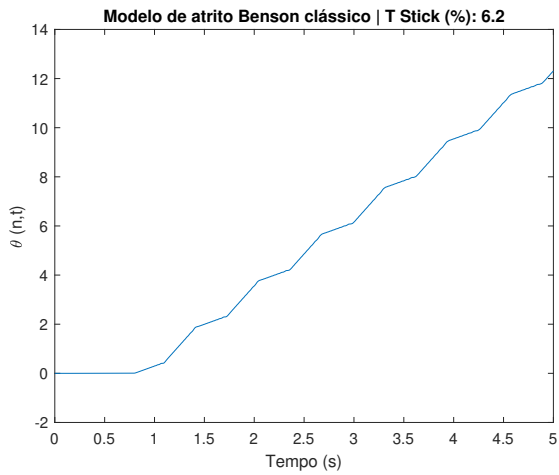


(a) Evolução da posição no último elemento

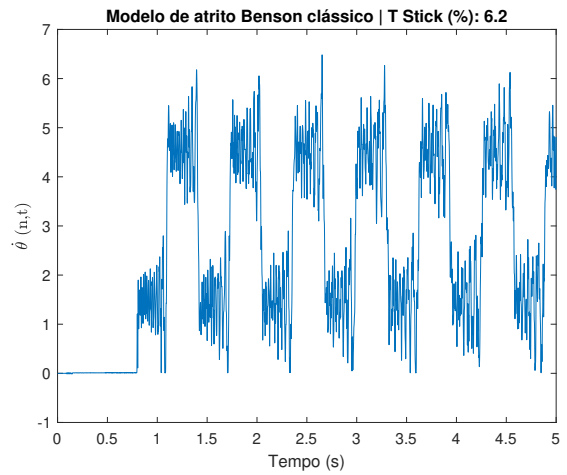


(b) Evolução da velocidade no último elemento

Figura 8: Evolução temporal no último elemento no modelo de Coulomb não-funcional

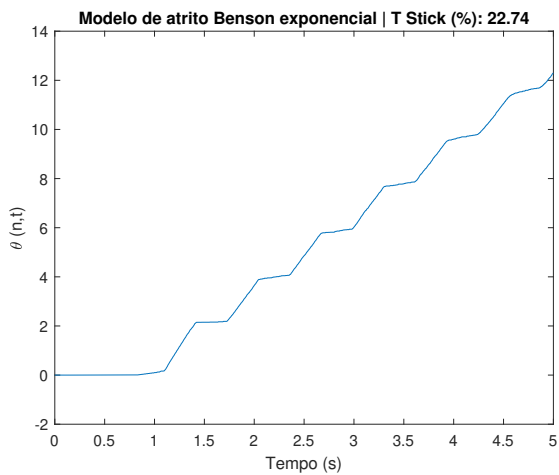


(a) Evolução da posição no último elemento

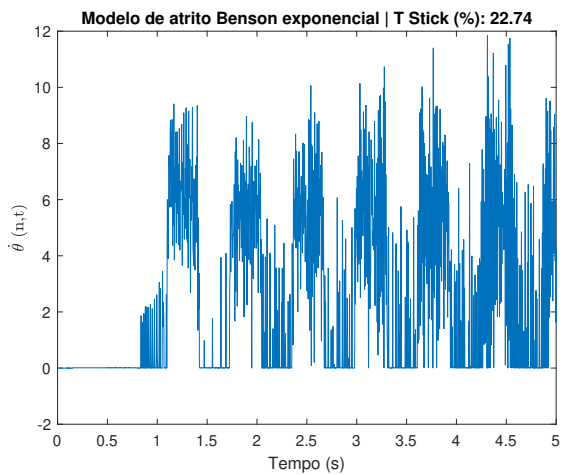


(b) Evolução da velocidade no último elemento

Figura 9: Evolução temporal no último elemento no modelo de Benson clássico



(a) Evolução da posição no último elemento



(b) Evolução da velocidade no último elemento

Figura 10: Evolução temporal no último elemento no modelo de Benson exponencial

6. CONCLUSÕES

Os gráficos e os tempos de *stick* apresentados nos permite avaliar a influência do modelo de atrito na resposta do sistema. Embora as dinâmicas no modelo sejam parecidas quando apenas observamos os gráficos de velocidade e posição,

as durações dos *sticks* computadas contém diferenças significativas. O sistema apresentou o comportamento esperado, com um grande *stick* inicial onde a força elástica ainda não é suficiente para vencer o atrito estático seguido de uma progressão da rotação com vibrações torcionais variando a velocidade. É interessante observar que o aumento da força de atrito de saturação com a manutenção da força de atrito dinâmica aumenta consideravelmente o tempo que o sistema permanece em *stick*, como observado nos modelos de Benson.

Sobre a convergência dos modelos, todos convergiram com um número de elementos semelhante, assim como um passo temporal e margem ϵ próximos. A partir dos dados obtidos na análise de convergência, observa-se que o resultado de tempo em *stick* varia consideravelmente antes de convergir com número de elementos, passo temporal e margem ϵ suficientes, o que demonstra a importância desses fatores para a obtenção de simulações confiáveis.

7. REFERÊNCIAS

- de Castro Pessoa, F., 2020. *Análise torcional de colunas de perfuração com stick-slip*. PUC-Rio.
- Dormand, J.R. and Prince, P.J., 1980. "A family of embedded runge-kutta formulae". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 6, pp. 19–26.
- Dukkipati, R.V., 2000. *Solving Vibration Analysis Problems Using MATLAB*. New Age International Ltd.
- Hughes, T.J.R., 1987. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice Hall Inc.
- Innman, D.J., 2014. *Engineering Vibrations*. Pearson Education, New Jersey, 4th edition.
- Lima, R. and Sampaio, R., 2015. "Stick-mode duration of a dry-friction oscillator with an uncertain model". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 353, pp. 259–271.
- Lima, R. and Sampaio, R., 2017. "Construction of a statistical model for the dynamics of a base-driven stick-slip oscillator". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 91, pp. 157–166.
- Monteiro, H.L.S. and Trindade, M.A., 2017. "Performance analysis of proportional-integral feedback control for the reduction of stick-slip-induced torsional vibrations in oil well drillstrings". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 398, pp. 28–38.
- Pennestri, E., Rossi, V., Salvini, P. and Valentini, P.P., 2016. "Review and comparison of dry friction force models". *Nonlinear Dynamics*, Vol. 83, pp. 1785–1801.
- Sampaio, R., Almeida, P. and Rito, T., 2007. *Dinâmica de estruturas flexíveis*. PUC-Rio.
- Shampine, L.F. and Reichelt, M.W., 1997. "The matlab ode suite". *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 18, pp. 1–22.