

ANÁLISE NUMÉRICA E SOLUÇÃO MATEMÁTICA PARA A EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DO CALOR EM REGIME PERMANENTE BIDIMENSIONAL

Felipe Mercês Biglia, felipebiglia@gmail.com¹
Victor Vaurek Dimbarre, victordimbarre@alunos.utfpr.edu.br²
Paulo Henrique Dias dos Santos, psantos@utfpr.edu.br¹
Thiago Antonini Alves, antonini@utfpr.edu.br²

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento Acadêmico de Mecânica, Rua Deputado Heitor Alencar Furtado, 5000, Ecoville, 81280-340, Curitiba, PR, Brasil.

²Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento Acadêmico de Mecânica, Rua Doutor Washington Subtil Chueire, 330, Jardim Carvalho, 84017-220, Ponta Grossa, PR, Brasil.

Resumo. Este trabalho tem como objetivo apresentar a solução matemática da equação da difusão de calor em regime permanente bidimensional (direção r e z) em coordenadas cilíndricas, com geração de calor e sua análise numérica. A metodologia adotada consiste na obtenção da solução analítica e a implementação de um código para solução numérica, por meio do Método dos Volumes Finitos (TDMA-2D), via Microsoft Visual Studio 19, na linguagem Fortran, para análise posterior. Os parâmetros analisados foram relativos a condutividade térmica, neste caso, para os seguintes materiais: aço inoxidável, aço 1020 e cobre. Os resultados possuem boa concordância, apresentando os mesmos comportamentos e tendências.

Palavras chave: MVF, Fortran, Análise Numérica, TDMA-2D.

Abstract. This work aims to present the mathematical solution of the two-dimensional heat conduction equation at steady state (r and z direction) in cylindrical coordinates, with heat generation and its numerical analysis. The methodology adopted consists in obtaining the analytical solution and implementing a code for numerical solution, by means of the Finite Volume Method (TDMA-2D), in Microsoft Visual Studio 19, in Fortran language, for further analysis. The parameters analyzed were related to thermal conductivity, in this case, for the following materials: stainless steel, 1020 steel and copper. The results are in good agreement, presenting the same behaviors and trends.

Keywords: FVM, Fortran, Numerical Analysis, TDMA-2D.

1. INTRODUÇÃO

O problema em estudo consiste na difusão de calor em regime permanente, bidimensional em coordenadas cilíndricas com geração de calor, presente em diversas aplicações.

Dentre elas podemos citar resistências elétricas aplicadas em estufas, fritadeiras, fornos, ebulidores, churrasqueiras elétricas, degelo, destiladores e autoclaves, sendo este último, escolhido para estudo de caso neste trabalho.

A autoclave para laboratório, mostrada na Fig. (1) – (a), tem por finalidade esterilizar materiais através do vapor sob pressão. Em geral, sua utilização se dá em hospitais, indústrias e demais estabelecimentos que necessitem de utensílios esterilizados. A elevação da temperatura ocorre por meio da resistência elétrica, Fig. (1) - (b), provida pelo efeito Joule, que consiste na conversão de energia elétrica em calor.



Figura 1. (a) Autoclave Silver - Mini - Biotron; (b) Resistência Elétrica - Autoclave.

Neste contexto, este trabalho tem como objetivos:

- Mostrar a modelagem e solução matemática para o fenômeno em estudo, referente a resistência térmica aplicada em autoclaves.
- Implementar uma solução via Método dos Volumes Finitos (MVF) na linguagem de programação FORTRAN (*Fórmula Translation*), no software *Microsoft Visual Studio 2019*, para análise numérica.
- Analisar o comportamento do fenômeno, neste caso, para diferentes materiais (condutividade térmica).

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

A equação da difusão de calor em coordenadas cilíndricas é dada pela Equação (1).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g_0 = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Temos as seguintes hipóteses: condução bidimensional (r, z) e propriedades constantes (k). Desta forma, obtemos a Equação (2), sendo a mesma, responsável pela formulação matemática do problema em análise.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{g_0}{k} = 0 \quad (2)$$

Com a finalidade de simplificar a modelagem do fenômeno em estudo, podemos considerar a resistência elétrica da autoclave sendo do tipo reta, com comprimento de 360 mm e diâmetro de 7 mm, fabricadas em aço inox ou 1020. Logo, teremos os limites do domínio a ser avaliado, conforme apresentado nas Equações (3) e (4), ilustrado pela Fig. (2).

$$0 \leq r < b = 0.0035 \text{ m} \quad (3)$$

$$0 < z < L = 0.36 \text{ m} \quad (4)$$

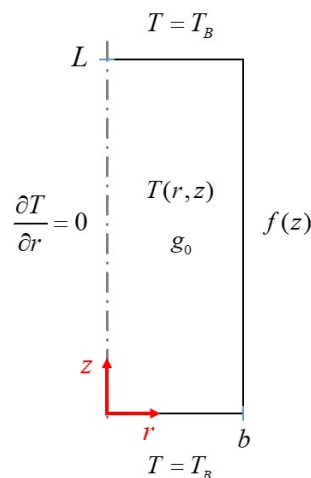


Figura 2. Domínio do fenômeno em análise.

Para determinar as condições de contorno, precisamos recorrer ao Manual de Qualificação de Esterilização em Autoclaves (2009), o qual indica que a temperatura de esterilização deve ter valores entre 121°C e 134°C.

Por meio do software *Microsoft Excel 2013*, podemos estimar uma equação característica para $f(z)$, aplicando uma linha de tendência, neste caso polinomial, como apresentado na Fig. (3).

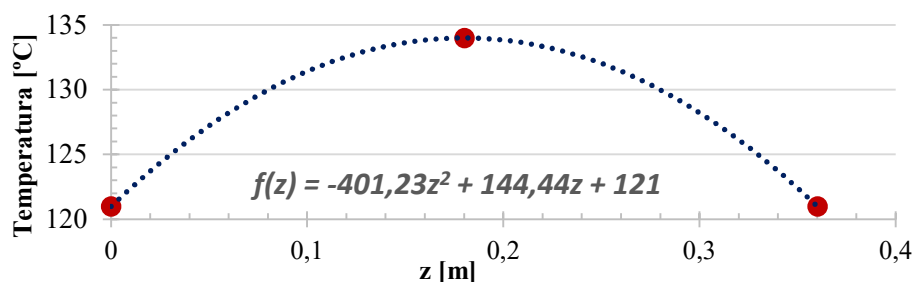


Figura 3. Estimativa de $f(z)$.

Desta forma, referente as condições de contorno, temos o conjunto de Equações (5).

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \text{ (simetria)} \quad (5.a)$$

$$T(r=b) = f(z) = -401.23 z^2 + 144.44 z + 121 \quad (5.b)$$

$$T(z=0) = T_B = 121 \text{ °C} \quad (5.c)$$

$$T(z=L) = T_B = 121 \text{ °C} \quad (5.d)$$

Referente ao termo de geração de calor, considerando que a autoclave em análise tenha a potência de 1500W, teremos: $g_0 \approx 108.3 \text{ MW/m}^3$.

Finalmente, para determinar a solução analítica, partindo da Eq. (2), temos uma Equação Diferencial Parcial (EDP) não homogêneo, desta forma, procedemos com o Método da Superposição, da forma prescrita pela Eq. (6).

$$T(r, z) = \Psi(r, z) + \Phi(z) \quad (6)$$

onde: $\Psi(r, z)$ levará a EDP homogênea e $\Phi(z)$ levará a EDO não homogênea, conforme exemplificado pela Fig. (4), para as condições de contorno do exemplo 4.6 (Hahn e Özisik, 2012).

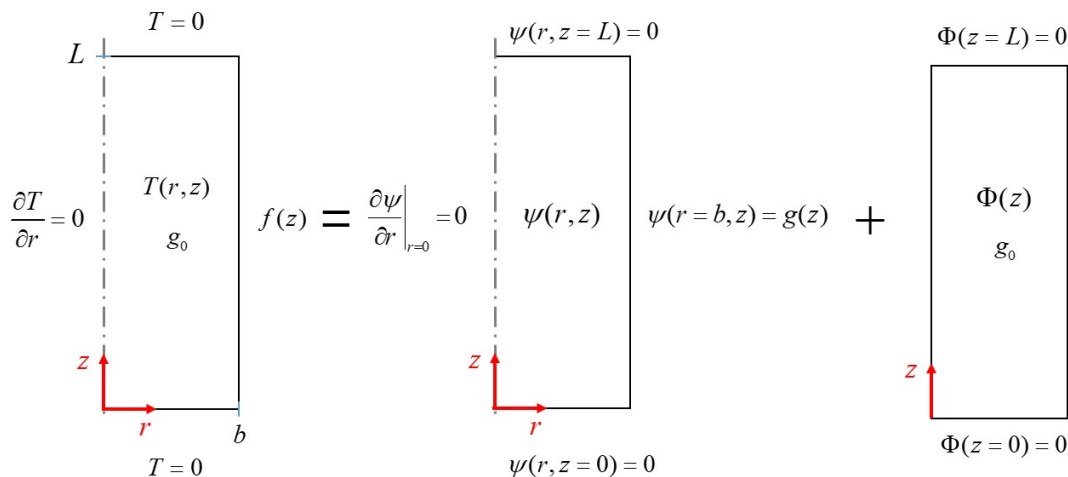


Figura 4. Esquemática do Método da Superposição.

Conforme demonstrado em Hahn e Özisik (2012), temos as seguintes soluções:

Para a EDO não homogênea, a Eq. (7).

$$\Phi(z) = \frac{g_0 L^2}{2k} \left[\frac{z}{L} - \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right] + 121 \quad (7)$$

Referente a EDP homogênea, a Eq. (8).

$$\Psi(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n I_0(\lambda_n r) \sin \lambda_n z \quad (8)$$

Onde:
$$C_n = \frac{\int_{z=0}^L g(z) \sin \lambda_n z dz}{I_0(\lambda_n b) \int_{z=0}^L \sin^2 \lambda_n z dz}; \text{ sendo: } g(z) = f(z) - \Phi(z)$$

Portanto, aplicando as Equações (7) e (8) na Eq. (6), obtemos a solução completa, fornecida pela Eq. (9):

$$T(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n I_0(\lambda_n r) \sin \lambda_n z + \frac{g_0 L^2}{2k} \left[\frac{z}{L} - \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right] + 121 \quad (9)$$

3. MODELAGEM NUMÉRICA

Referente a modelagem numérica, aplicaremos o Método dos Volumes Finitos (MVF), no qual, de acordo com Maliska (2004), as equações aproximadas são obtidas através de balanços de conservação da propriedade envolvida (massa, quantidade de movimento, entalpia, etc.) no volume elementar, ilustrado na Fig. (5).

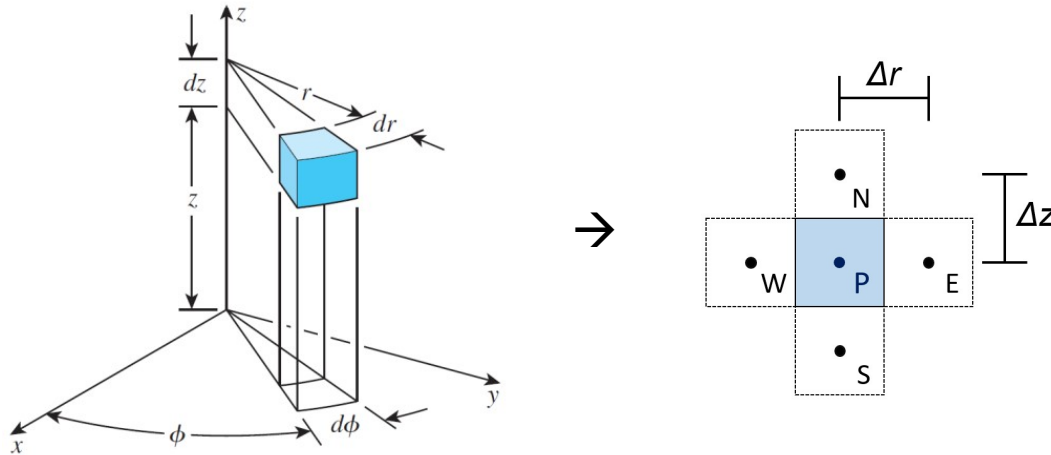


Figura 5. Exemplificação do volume elementar adaptado para coordenadas cilíndricas.

Uma parte da grade bidimensional usada para a discretização pode ser observada na Fig. (6) (Adaptado de Versteeg e Malalasekera, 2007).

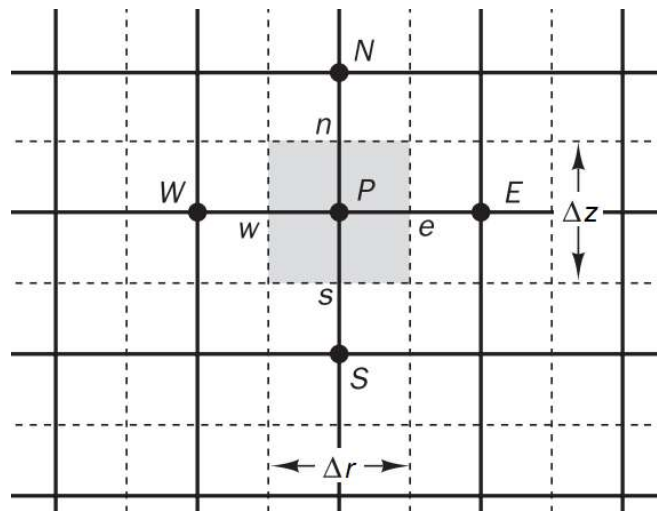


Figura 6. Grade bidimensional usada para discretização do domínio em volumes finitos.

Inicialmente, deve-se ressaltar as seguintes considerações: Propriedades constantes; Malha uniforme; Área da seção transversal constante.

Assim, aplicando o MVF na Eq. (2):

$$\int_{VC} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) dV + \int_{VC} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) dV - \int_{VC} \frac{g_0}{k} dV = 0 \quad (10)$$

Pelo Teorema de Gauss:

$$\int_{VC} \nabla^2 T dV = \oint_{SC} \nabla T dA \rightarrow \left[\left(A \frac{dT}{dr} \right)_E - \left(A \frac{dT}{dr} \right)_W \right] + \left[\left(A \frac{dT}{dz} \right)_N - \left(A \frac{dT}{dz} \right)_S \right] + \frac{g_0}{k} \Delta V = 0 \quad (11)$$

Logo:

$$A_e \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta r} \right) - A_w \left(\frac{T_P - T_W}{\Delta r} \right) + A_n \left(\frac{T_N - T_P}{\Delta z} \right) - A_s \left(\frac{T_P - T_S}{\Delta z} \right) + \frac{g_0}{k} A \Delta r = 0 \quad (12)$$

Onde: $A_e = \Delta \theta \Delta z r_e$; $A_w = \Delta \theta \Delta z r_w$; $A = r_p \Delta \theta \Delta z$ e $A_n = A_s = \frac{\Delta \theta}{2} (r_e^2 - r_w^2)$

Sendo: $r_e = \left(r_p + \frac{\Delta r}{2} \right)$ e $r_w = \left(r_p - \frac{\Delta r}{2} \right)$

Tendo como base o TDMA-2D, a equação discretizada na forma algébrica é dada pela Eq. (13).

$$a_p T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + S_u \quad (13)$$

Na qual, deve-se satisfazer a seguinte relação: $a_p = a_E + a_W + a_N + a_S - S_p$

Por fim, a Tabela (1) apresenta os coeficientes de temperatura determinados para cada nó.

Tabela 1. Coeficientes de temperatura para cada nó.

	a_E	a_W	a_N	a_S	S_u	S_p
Nós centrais	$\frac{r_e}{\Delta r^2}$	$\frac{r_w}{\Delta r^2}$	$\frac{r_e + r_w}{2\Delta z^2}$	$\frac{r_e + r_w}{2\Delta z^2}$	$\frac{g_0 r_p}{k}$	0
Nó (1,1)	$\frac{r_e}{\Delta r^2}$	0	$\frac{r_e}{2\Delta z^2}$	0	$\frac{g_0 r_p}{k} + T_B \frac{r_e}{\Delta z^2}$	$-\frac{r_e}{\Delta r^2}$
Nó (1,n)	$\frac{r_e}{\Delta r^2}$	0	0	$\frac{r_e}{2\Delta z^2}$	$\frac{g_0 r_p}{k} + T_B \frac{r_e}{\Delta z^2}$	$-\frac{r_e}{\Delta r^2}$
Nó (n,1)	0	$\frac{r_w}{\Delta r^2}$	$\frac{r_e + r_w}{2\Delta z^2}$	0	$\frac{g_0 r_p}{k} + T_B \frac{r_e + r_w}{\Delta z^2} + \frac{2r_e}{\Delta r^2} f(z)$	$-\frac{2r_e}{\Delta r^2} - \left(\frac{r_e + r_w}{\Delta z^2} \right)$
Nó (n,n)	0	$\frac{r_w}{\Delta r^2}$	0	$\frac{r_e + r_w}{2\Delta z^2}$	$\frac{g_0 r_p}{k} + T_B \frac{r_e + r_w}{\Delta z^2} + \frac{2r_e}{\Delta r^2} f(z)$	$-\frac{2r_e}{\Delta r^2} - \left(\frac{r_e + r_w}{\Delta z^2} \right)$
Primeira coluna	$\frac{r_e}{\Delta r^2}$	0	$\frac{r_e}{2\Delta z^2}$	0	$\frac{g_0 r_p}{k}$	0
Última coluna	0	$\frac{r_w}{\Delta r^2}$	$\frac{r_e + r_w}{2\Delta z^2}$	$\frac{r_e + r_w}{2\Delta z^2}$	$\frac{g_0 r_p}{k} + \frac{2r_e}{\Delta r^2} f(z)$	$-\frac{2r_e}{\Delta r^2}$
Primeira linha	$\frac{r_e}{\Delta r^2}$	$\frac{r_w}{\Delta r^2}$	$\frac{r_e + r_w}{2\Delta z^2}$	0	$\frac{g_0 r_p}{k} + T_B \frac{r_e + r_w}{\Delta z^2}$	$-\left(\frac{r_e + r_w}{\Delta z^2} \right)$
Última linha	$\frac{r_e}{\Delta r^2}$	$\frac{r_w}{\Delta r^2}$	0	$\frac{r_e + r_w}{2\Delta z^2}$	$\frac{g_0 r_p}{k} + T_B \frac{r_e + r_w}{\Delta z^2}$	$-\left(\frac{r_e + r_w}{\Delta z^2} \right)$

4. VERIFICAÇÃO NUMÉRICA

A solução analítica (exata) é obtida por meio da Equação (9), conforme demonstrando na seção 2, sendo ela:

$$T(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n I_0(\lambda_n r) \sin \lambda_n z + \frac{g_0 L^2}{2k} \left[\frac{z}{L} - \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right] + 121$$

A solução numérica, cuja modelagem foi desenvolvida na seção 3, foi implementada na linguagem Fortran, via *Microsoft Visual Studio 19*.

Foram idealizadas 3 malhas para o caso em estudo, e posterior análise, sendo elas: 10x10 (M1), 50x50 (M2) e 150x150 (M3). Resultados preliminares das mesmas podem ser observados na Fig.(7), para $r = b/2$ e material: Aço Inoxidável.

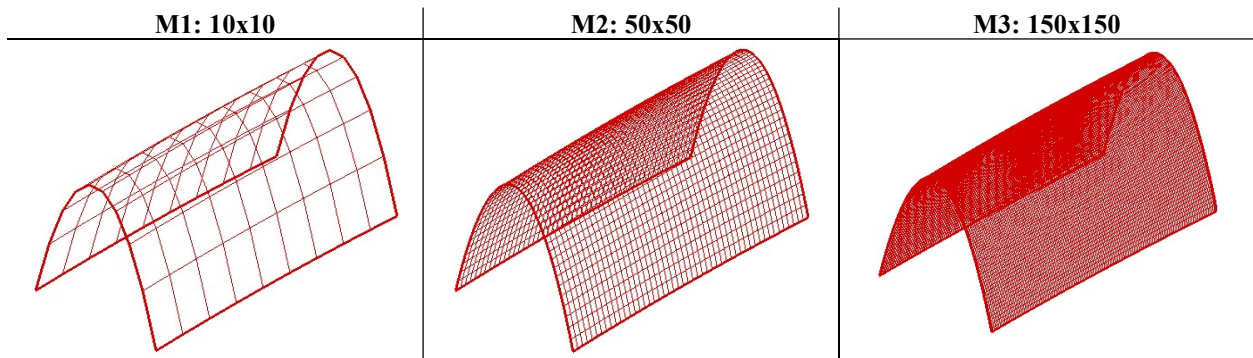


Figura 7. Malhas 10x10, 50x50 e 150x150 para $r = b/2$, Aço Inoxidável.

Referente a verificação da solução numérica do modelo matemático, em comparativo com a solução exata, utilizou-se dos conceitos de Erro absoluto, Erro relativo e Incerteza.

O erro absoluto é calculado por meio da Eq. (14).

$$E_{abs} = |T_{Exa} - T_{Num}| \tag{14}$$

Os menores valores de erros absolutos encontrados em cada malha, mostrados na Fig. (8), foram: M1 = 0.5395 °C, M2 = 0.3676 °C e M3 = 0.1201 °C.

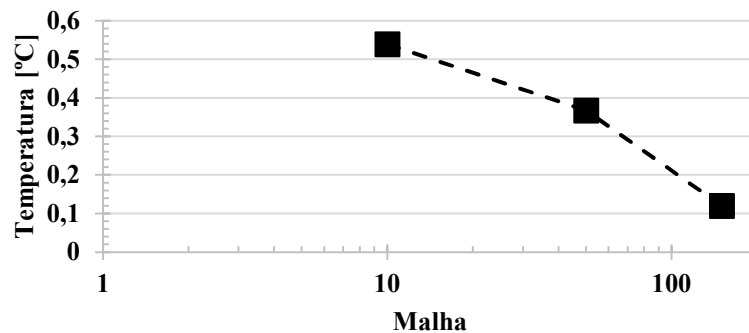


Figura 8. Erros absolutos nas malhas 10x10, 50x50 e 150x150 para $r = b/2$, Aço Inoxidável.

O erro relativo é calculado por meio da Eq. (15).

$$E_{rel} = \left| \frac{T_{Exa} - T_{Num}}{T_{Exa}} \right| 100 \tag{15}$$

Os menores valores de erros relativos encontrados em cada malha, apresentados na Fig. (9), foram: M1 = 0.3976%, M2 = 0.2721% e M3 = 0.0895%.

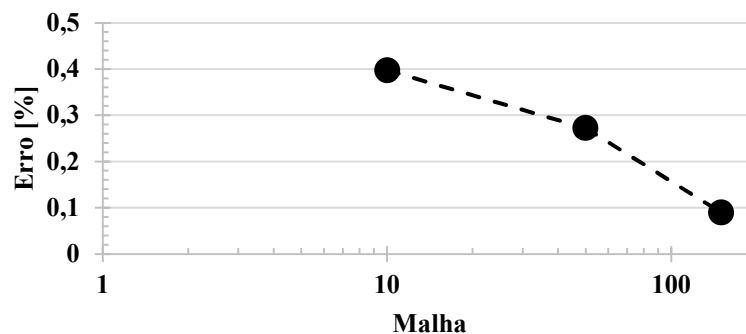


Figura 9. Erros relativos nas malhas 10x10, 50x50 e 150x150 para $r = b/2$, Aço Inoxidável.

Por fim, realizou-se uma análise de incertezas, comparando a malha mais “refinada” (150x150) em relação a mais “grosseira” (10x10), na qual obteve-se o valor de incerteza numérica de ± 0.1004 °C.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados apresentados nesta seção, foram obtidos por meio da utilização do software *Visual Studio 19*.

A Tabela (2) apresenta os dados de entrada, de acordo com as condições de contorno, considerado, neste trabalho, como resultado “padrão”, para implementação do problema e suas posteriores análises.

Tabela 2. Dados de entrada.

Propriedade	Símbolo	Unidade	Valor
Comprimento ou Altura	L	m	0.36
Condutividade Térmica – Aço inoxidável	k	W/(m.°C)	17.5
Geração de calor	g_0	MW/m ³	108.3
Raio	b	m	0.0035
Temperatura na base (inferior e superior)	T_b	°C	121

A Fig. (10) apresenta as distribuições de temperatura para as malhas 10x10, 50x50 e 150x150, respectivamente, idem as da Fig. (7), sendo $r = b/2$.

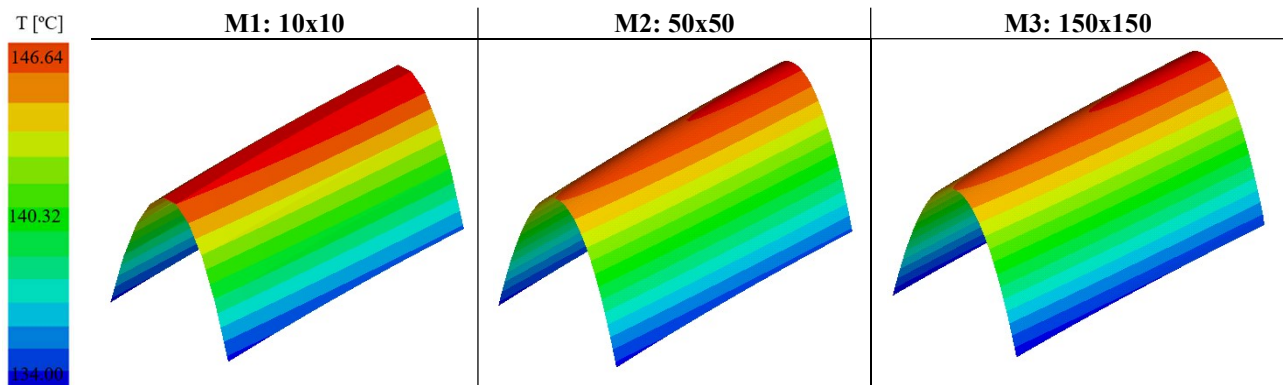


Figura 10. Distribuição de temperatura nas malhas 10x10, 50x50 e 150x150 para $r = b/2$.

Conforme indicado na Fig. (10) e apresentado seção 4, podemos optar por utilizar a malha mais refinada (150x150) para os comparativos de análise.

Desta forma, a Fig. (11) apresenta os resultados para distribuições de temperatura, via solução analítica (Exata) e numérica (MVF-TDMA-2D), em razão do comprimento (z) para a malha de 150x150, com $r = b/2$.

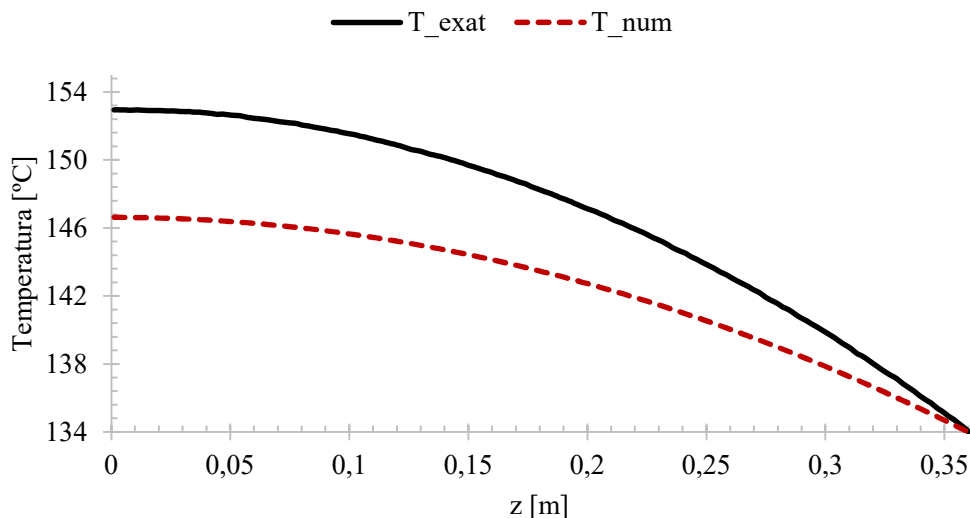


Figura 11. Distribuição de temperatura em razão do comprimento para $r = b/2$.

Observa-se boa concordância entre os resultados, especialmente quando a escala de temperatura é aumentada, como exemplificado na Fig. (12), tendo como maiores valores de erros absoluto e relativo, 6.3292 °C e 4.1378%, respectivamente.

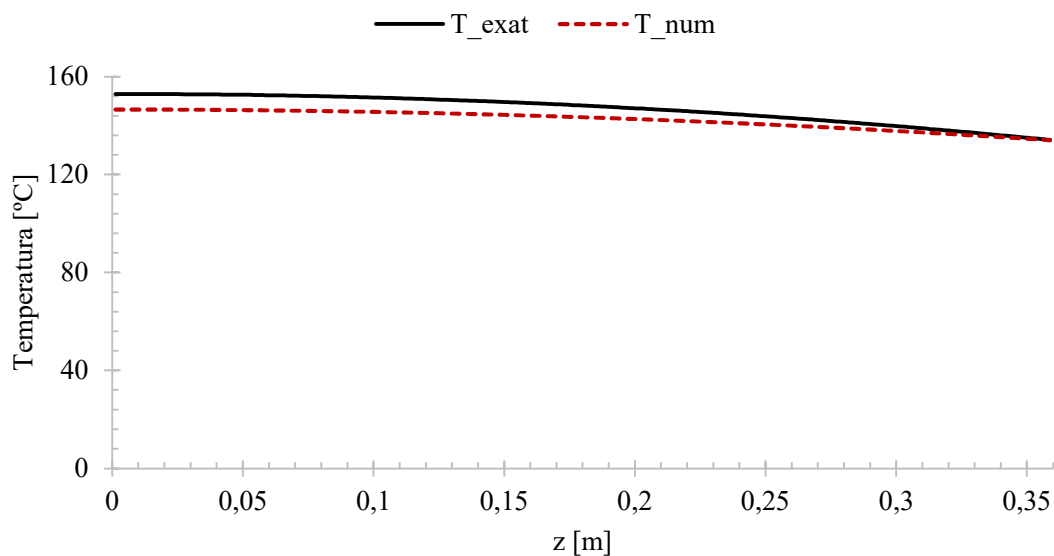


Figura 12. Distribuição de temperatura em razão do comprimento para $r = b/2$ [0 – 160 °C].

Referente a análise de engenharia do comportamento do fenômeno, de modo geral, podemos variar os seguintes parâmetros: comprimento, raio, temperaturas prescritas, geração de calor e condutividade térmica (material).

Todavia, conforme indicado pelo fabricante, a resistência elétrica aplicada em autoclaves é fabricada em Aço Inoxidável (demonstrado nos resultados anteriores) ou Aço 1020.

Portanto, podemos manter fixos os dados de entrada da Tab. (2), variando apenas os valores de condutividade térmica, inserindo também como terceiro material, o Cobre, devido à sua alta aplicabilidade no contexto de ciências térmicas e ao fato de sua condutividade térmica ser muito superior em relação a dos demais materiais, conforme indicado na Tab. (3).

Tabela 3. Valores de Condutividade Térmica [W/(m.°C)].

Material	Valor
Aço 1020	51.1
Aço inoxidável	17.5
Cobre	401.0

As distribuições de temperatura, via solução analítica (Exata) e numérica (MVF-TDMA-2D), em razão do comprimento (z) para a malha de 150x150, com $r = b/2$, para aço inoxidável, aço 1020 e cobre são apresentadas pelas Figuras (13) e (14).

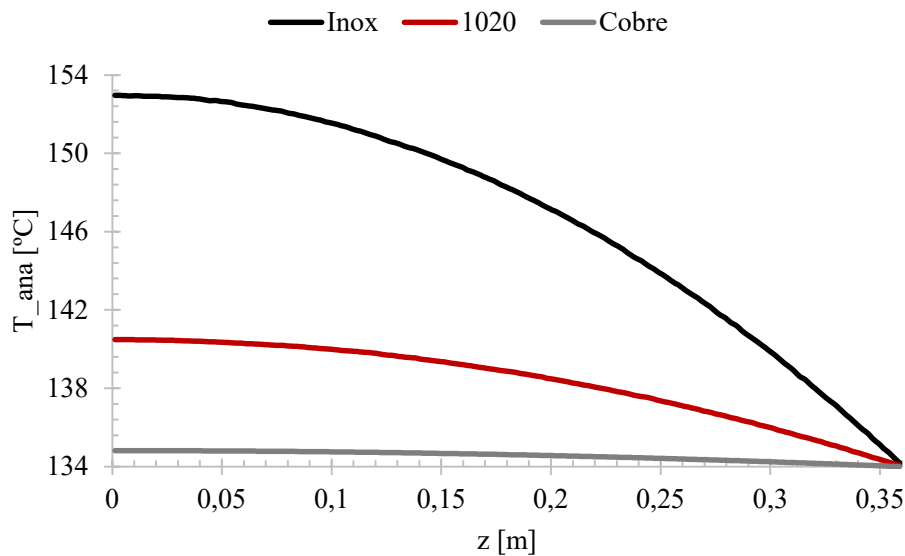


Figura 13. Distribuição de temperatura (solução exata) para diferentes materiais, $r = b/2$.

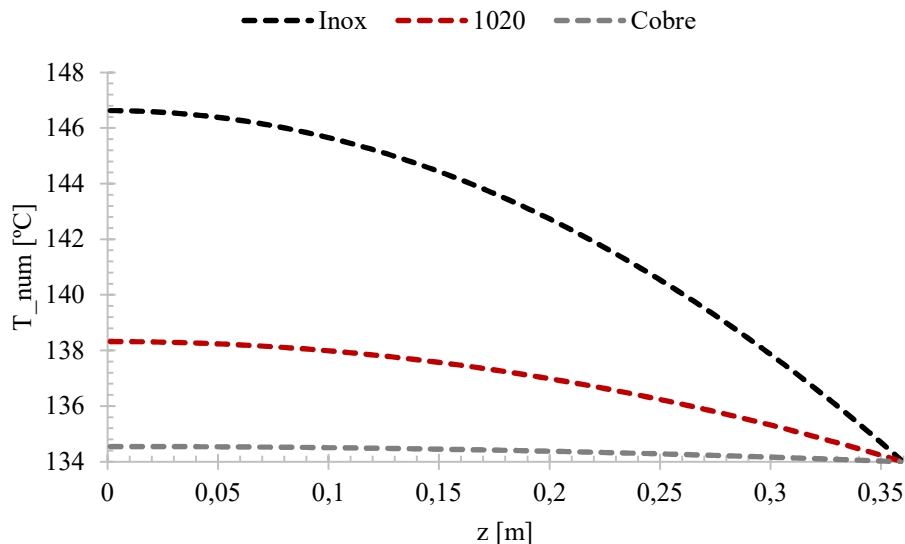


Figura 14. Distribuição de temperatura (solução numérica) para diferentes materiais, $r = b/2$.

As Figuras (13) e (14) demonstram que a condutividade térmica é diretamente proporcional ao fenômeno de difusão de calor no meio, conforme indica a lei de Fourier (Incropera et al., 2014). Desta forma, quanto maior seu valor, mais rapidamente o corpo dissipará o calor gerado, de forma análoga a comportamentos experimentais, conforme os encontrados por Biglia et al. (2017), para diferentes materiais.

Destaca-se ainda, que no caso do material sendo Cobre, observa-se uma temperatura praticamente constante, cujo os erros absolutos e relativos, foram em média, 0.1822 °C e 0.1353%, respectivamente.

6. CONCLUSÕES

De modo geral, pode-se concluir que os objetivos desta pesquisa foram atingidos.

Os resultados numéricos apresentam boa concordância com os analíticos (exatos) presentes na literatura, conforme presente em Hahn e Özisik (2012) e Incropera et al. (2014), tendo os mesmos comportamentos e tendências, permitindo assim, a garantia de uma correta análise do fenômeno em estudo.

Por fim, destaca-se que o MVF-TDMA-2D, nesta aplicação, apresentou uma convergência quase que imediata, independente da malha em análise, provavelmente devido à alta geração de calor em relação as pequenas dimensões de comprimento e raio.

7. AGRADECIMENTOS

Agradecimentos são prestados à CAPES, à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da UTFPR, à Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e ao Departamento Acadêmico de Mecânica da UTFPR/Câmpus Ponta Grossa e do Câmpus Curitiba.

8. REFERÊNCIAS

- Biglia, F. M.; Machado, V.; Alves, T. A. Estudo analítico-numérico-experimental da transferência de calor em aletas com seção transversal uniforme. In: XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2017, Florianopolis, 2017.
- Hahn, D. W.; Özisik, M. N. "Heat Conduction", 3 Ed., New York: John Wiley & Sons, 2012. pp. 145-148
- Incropera, F. et al. "Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa", 7 Ed., Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- Maliska, C. R. Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional. Rio de Janeiro, BRA: LTC, 2004.
- Manual de qualificação de esterilização em autoclaves. Prefeitura municipal de Ribeirão Preto - SP. Comissão de controle de infecção, secretaria municipal de saúde, SUS, 2009.
- Versteeg, H. K., Malalasekera, W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method, 2th ed., Pearson, 2007.

9. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.