

ANÁLISE NUMÉRICA E SOLUÇÃO MATEMÁTICA PARA A EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DO CALOR EM EM REGIME TRANSIENTE UNIDIMENSIONAL EM UMA PAREDE PLANA

Felipe Mercês Biglia, felipebiglia@gmail.com¹
Victor Vaurek Dimbarre, victordimbarre@alunos.utfpr.edu.br²
Paulo Henrique Dias dos Santos, psantos@utfpr.edu.br¹
Thiago Antonini Alves, antonini@utfpr.edu.br²

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento Acadêmico de Mecânica, Rua Deputado Heitor Alencar Furtado, 5000, Ecoville, 81280-340, Curitiba, PR, Brasil.

²Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento Acadêmico de Mecânica, Rua Doutor Washington Subtil Chueire, 330, Jardim Carvalho, 84017-220, Ponta Grossa, PR, Brasil.

Resumo. Este trabalho tem como objetivo apresentar a solução matemática da equação da difusão de calor em regime transiente unidimensional (direção x) em uma parede plana, com isolamento e convecção em um ambiente de temperatura zero e sua análise numérica. A metodologia adotada consiste na utilização de transformadas de Laplace para solução analítica e da implementação de um código para solução numérica, via Maple 21, para análise posterior. Os parâmetros analisados foram a condutividade térmica, a temperatura inicial e a espessura da parede. Os resultados possuem boa concordância com os presentes na literatura, apresentando os mesmos comportamentos e tendências.

Palavras-chave: Solução Analítica, Laplace, Análise Numérica, Maple.

Abstract. For the present paper aims to present the mathematical solution of the one-dimensional transient heat equation (x direction) in a flat wall, with insulation and convection in a zero temperature environment and its numerical analysis. The methodology adopted consists in the use of Laplace transforms for analytical solution and the implementation of a code for numerical solution, in Maple 21, for further analysis. The parameters analyzed were thermal conductivity, initial temperature and wall thickness. The results are in good agreement with those in the literature, presenting the same behaviors and trends.

Keywords: Analytical Solution, Laplace, Numerical Analysis, Maple.

1. INTRODUÇÃO

O problema em estudo consiste na difusão de calor em regime transiente unidimensional (direção x) em uma parede plana, com isolamento e convecção em um ambiente de temperatura zero, presente em diversas aplicações.

Dentre elas podemos citar aplicações de conforto térmico, no qual o principal objeto é mantêm a temperatura interna do ambiente isolado em patamares aceitáveis, no qual as condições de conforto sejam garantidas.

A Figura (1) ilustra o fenômeno em análise.

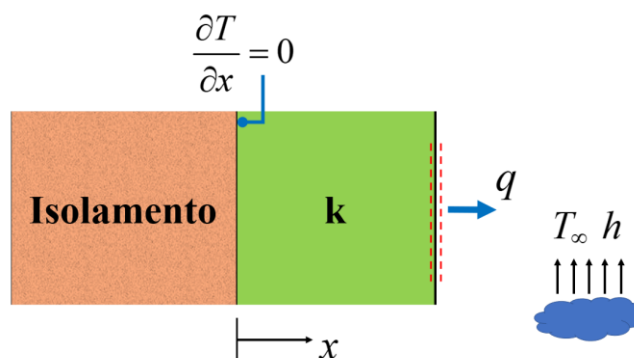


Figura 1. Difusão de calor (parede plana), com isolamento e convecção.

O isolamento térmico é aconselhável quando a temperatura exterior está inferior à 10 °C, podendo ser associada a aquecimento artificial (Frota e Schiffer, 2001).

Neste contexto, este trabalho tem como objetivos:

- Mostrar a modelagem e solução matemática para o fenômeno de difusão de calor em regime transiente unidimensional em uma parede plana, com isolamento e convecção em um ambiente de temperatura zero.
- Implementar uma solução no *software* Maple 21, para análise numérica.
- Analisar numericamente o comportamento do fenômeno, variando os seguintes parâmetros: condutividade térmica, temperatura inicial e espessura.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesta seção são apresentadas as equações que modelam o problema e suas condições de contorno. O fenômeno em análise é ilustrado pela Fig. (2).

Partindo da equação da difusão de calor em coordenadas cartesianas, Equação (1).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

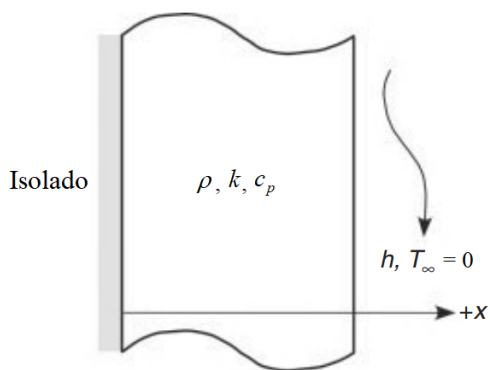


Figura 2. Condução de calor transiente em uma parede plana.

Para difusão de calor em regime transiente na direção x, temos as seguintes hipóteses: condução unidimensional (direção x), ausência de geração de calor ($\dot{q} = 0$) e propriedades constantes (k, ρ, c_p). Desta forma, obtemos a Equação (2), sendo a mesma, responsável pela formulação matemática do problema em análise.

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad (2)$$

As condições de contorno (isolamento e convecção), são ilustradas na Fig. (3), que fornece as Equações (3a) e (3b).

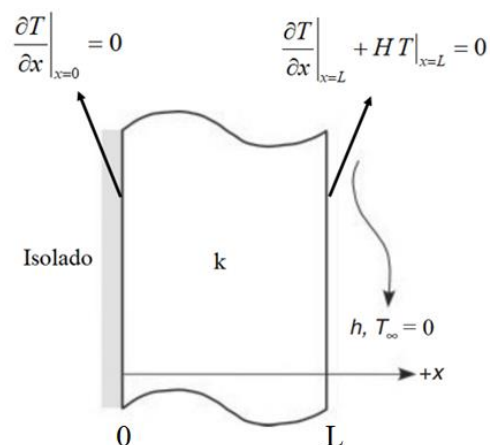


Figura 3. Condições de contorno (isolamento e convecção).

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3a)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} + HT|_{x=L} = 0 \quad (3b)$$

Onde: H , expressa a razão entre o coeficiente de transferência de calor por convecção e a condutividade térmica do meio ($H = h/k$).

A condição inicial é indicada pela Eq. (4).

$$T(x, t = 0) = T_0 \quad (4)$$

3. SOLUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

A solução do modelo matemático apresentado a seguir é descrita por Kakac et al (2018), ilustrada pela Fig. (4).

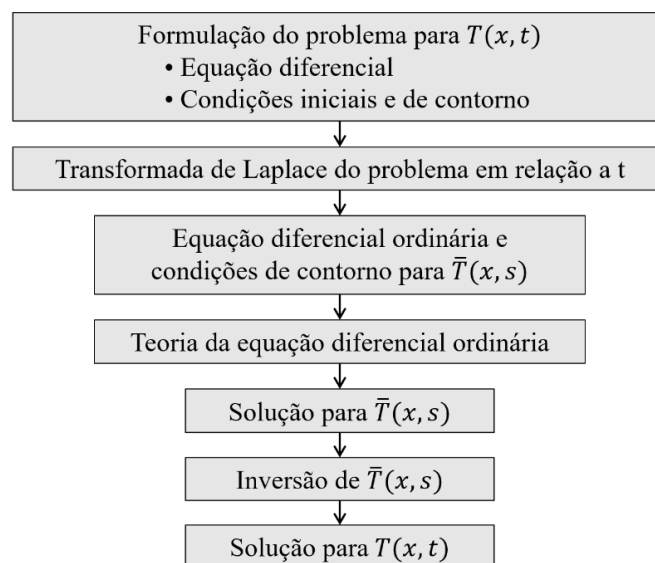


Figura 4. Procedimento para resolver problemas por transformadas de Laplace

Vamos primeiro encontrar a transformada de Laplace da Eq. (2), isso é:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right\} \quad (5)$$

O uso das propriedades de transformações de Laplace, produz:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right\} = \frac{\partial^2 \bar{T}(x, s)}{\partial x^2} \quad (6a)$$

$$\frac{1}{\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right\} = \frac{1}{\alpha} [s\bar{T}(x, s) - T(0)] = \frac{s}{\alpha} \bar{T}(x, s) - \frac{T_0}{\alpha} \quad (6b)$$

Assim, a Eq. (5) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(x, s)}{\partial x^2} - \frac{s}{\alpha} \bar{T}(x, s) = \frac{T_0}{\alpha} \quad (7)$$

De forma análoga, aplicando a transformada de Laplace nas condições de contorno (Equações (3a) e (3b)), obtemos:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \right\} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (8a)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} \right\} + H \mathcal{L} \{ T \Big|_{x=L} \} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \Big|_{x=L} + H \bar{T} \Big|_{x=L} = 0 \quad (8b)$$

A solução geral da equação diferencial não homogênea pode ser escrita como:

$$\bar{T}(x, s) = \bar{T}_H(x, s) + \bar{T}_P(x, s) \quad (9)$$

Referente a parte homogênea, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(x, s)}{\partial x^2} - \frac{s}{\alpha} \bar{T}(x, s) = 0 \quad (10)$$

Como indicado em Kreyszig (2011), a equação característica é: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Sendo, $a=0; b=-s/\alpha$.

Portanto, temos o Caso 1: $a^2 - 4b > 0$

$$\text{Onde: } \lambda^2 - \frac{s}{\alpha} = 0 \rightarrow \lambda = \sqrt{s/\alpha}$$

Cuja solução geral é dada por (Hahn e Özisik, 2012): $\theta(x) = C_1 \cosh(\lambda x) + C_2 \sinh(\lambda x)$

Portanto, a solução geral da Eq. (10), pode ser expressa pela Eq. (11).

$$\bar{T}_H(x, s) = C_1 \cosh(\sqrt{s/\alpha} x) + C_2 \sinh(\sqrt{s/\alpha} x) \quad (11)$$

A solução particular é obtida na transformada de Laplace com as condições de contorno, como:

$$\bar{T}_P(x, s) = \frac{T_0}{s} \quad (12)$$

Desta forma, agrupando as Equações (11) e (12), obtemos:

$$\bar{T}(x, s) = C_1 \cosh(\sqrt{s/\alpha} x) + C_2 \sinh(\sqrt{s/\alpha} x) + \frac{T_0}{s} \quad (13)$$

Aplicando a condição de contorno indicada na Eq. (8a) na Eq. (13), temos:

$$C_1 \sqrt{s/\alpha} \sinh(0) + C_2 \sqrt{s/\alpha} \cosh(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

Assim, a Eq. (13) assume a forma:

$$\bar{T}(x, s) = C_1 \cosh(\sqrt{s/\alpha} x) + \frac{T_0}{s} \quad (14)$$

Aplicando agora a segunda condição de contorno, Eq. (8b), na Eq. (14), tem-se:

$$C_1 \sqrt{s/\alpha} \sinh(\sqrt{s/\alpha} L) + H \left[C_1 \cosh(\sqrt{s/\alpha} L) + \frac{T_0}{s} \right] = 0 \quad (15a)$$

$$C_1 \left[\sqrt{s/\alpha} \sinh(\sqrt{s/\alpha} L) + H \cosh(\sqrt{s/\alpha} L) \right] = -H \frac{T_0}{s} \quad (15b)$$

$$C_1 = - \frac{HT_0}{s \left[\sqrt{s/\alpha} \sinh(\sqrt{s/\alpha} L) + H \cosh(\sqrt{s/\alpha} L) \right]} \quad (15c)$$

Retornando a Eq. (15c) na Eq. (14):

$$\bar{T}(x, s) = \frac{T_0}{s} - \frac{HT_0 \cosh(\sqrt{s/\alpha} x)}{s \left[\sqrt{s/\alpha} \sinh(\sqrt{s/\alpha} L) + H \cosh(\sqrt{s/\alpha} L) \right]} \quad (16)$$

Dividindo ambos os lados da Eq. (16) por T_0 , obtemos:

$$\frac{\bar{T}(x, s)}{T_0} = \frac{1}{s} - \frac{H \cosh(\sqrt{s/\alpha} x)}{s \left[\sqrt{s/\alpha} \sinh(\sqrt{s/\alpha} L) + H \cosh(\sqrt{s/\alpha} L) \right]} \quad (17)$$

Convertendo os termos hiperbólicos em exponenciais, sendo: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Assim:

$$\cosh\left(x\sqrt{s/\alpha}\right) = \frac{e^{x\sqrt{s/\alpha}} + e^{-x\sqrt{s/\alpha}}}{2}; \sinh\left(L\sqrt{s/\alpha}\right) = \frac{e^{L\sqrt{s/\alpha}} - e^{-L\sqrt{s/\alpha}}}{2}; \cosh\left(L\sqrt{s/\alpha}\right) = \frac{e^{L\sqrt{s/\alpha}} + e^{-L\sqrt{s/\alpha}}}{2}$$

Logo:

$$\frac{\bar{T}(x, s)}{T_0} = \frac{1}{s} - \frac{H\left(e^{x\sqrt{s/\alpha}} + e^{-x\sqrt{s/\alpha}}\right)}{s\left[\sqrt{s/\alpha}\left(e^{L\sqrt{s/\alpha}} - e^{-L\sqrt{s/\alpha}}\right) + H\left(e^{L\sqrt{s/\alpha}} + e^{-L\sqrt{s/\alpha}}\right)\right]} \quad (18)$$

Reorganizado os termos, podemos reescrever a Eq. (18), como:

$$\frac{\bar{T}(x, s)}{T_0} = \frac{1}{s} - \frac{H}{s} \frac{e^{-(L-x)\sqrt{s/\alpha}} + e^{-(L+x)\sqrt{s/\alpha}}}{H + \sqrt{s/\alpha}} \left[\frac{1}{1 + \frac{H - \sqrt{s/\alpha}}{H + \sqrt{s/\alpha}} e^{-2L\sqrt{s/\alpha}}} \right] \quad (19)$$

Expandindo o último termo no colchete como uma série binomial, sabendo que: $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$

$$\text{Para: } z = \frac{H - \sqrt{s/\alpha}}{H + \sqrt{s/\alpha}} e^{-2L\sqrt{s/\alpha}}$$

Portanto:

$$\frac{\bar{T}(x, s)}{T_0} = \frac{1}{s} - \frac{H}{s} \frac{e^{-(L-x)\sqrt{s/\alpha}} + e^{-(L+x)\sqrt{s/\alpha}}}{H + \sqrt{s/\alpha}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{H - \sqrt{s/\alpha}}{H + \sqrt{s/\alpha}} \right)^n e^{-2L\sqrt{s/\alpha n}} \right] \quad (20)$$

Para os primeiros termos do somatório da Eq. (20), aplicando a transformada inversa de Laplace (casos 1 e 57 da tabela 9-1 do Hahn e Özisik, 2012), finalmente, obtemos a solução do modelo matemático, expressa pela Eq. (21).

$$\frac{T(x, t)}{T_0} = 1 - \left[\operatorname{erfc} \frac{L-x}{\sqrt{4\alpha t}} - e^{H(L-x)+H^2\alpha t} \operatorname{erfc} \left(H\sqrt{\alpha t} + \frac{L-x}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \right] - \left[\operatorname{erfc} \frac{L+x}{\sqrt{4\alpha t}} - e^{H(L+x)+H^2\alpha t} \operatorname{erfc} \left(H\sqrt{\alpha t} + \frac{L+x}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \right] + \dots \quad (21)$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados numéricos apresentados nesta seção, foram obtidos por meio da utilização do *software Maple*, versão 21.

A Tabela (1) apresenta os dados de entrada, cujo resultado ilustrado na Fig. (5) é considerado, neste trabalho, como resultado “padrão”, para implementação do problema e suas posteriores análises.

Tabela 1. Dados de entrada.

Propriedade	Símbolo	Unidade	Valor
Coefficiente de transferência de calor por convecção	h	W/(m ² .°C)	200
Condutividade Térmica	k	W/(m.°C)	10
Difusividade Térmica	α	m ² /s	0.5 x 10 ⁻⁵
Espessura	L	m	0.05
Temperatura inicial	T_0	°C	25

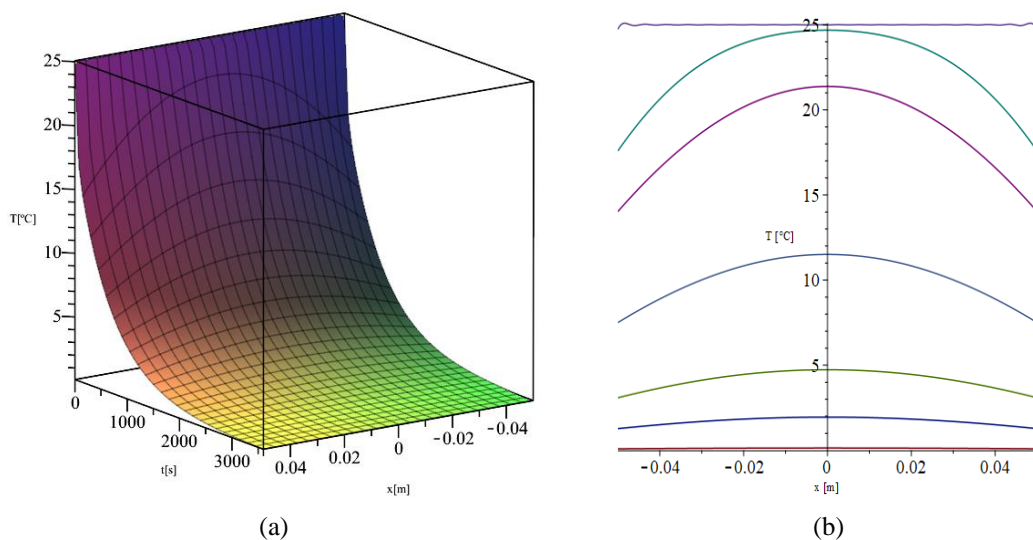


Figura 5. Resultado “padrão”. (a) Gráfico de superfície T versus t - x. (b) Gráfico T versus x.

Sendo definido o número de Biot, como: $Bi = hL/k$. Desta forma, para o resultado “padrão”, Fig. (5), com base na Tab. (1), temos $Bi \approx 1$.

De acordo com Incropera et al (2014), abrangemos os seguintes comportamentos de distribuição de temperatura em regime transiente para diferentes números de Biot em uma parede plana resfriada simetricamente por convecção, ilustrados na Fig. (6).

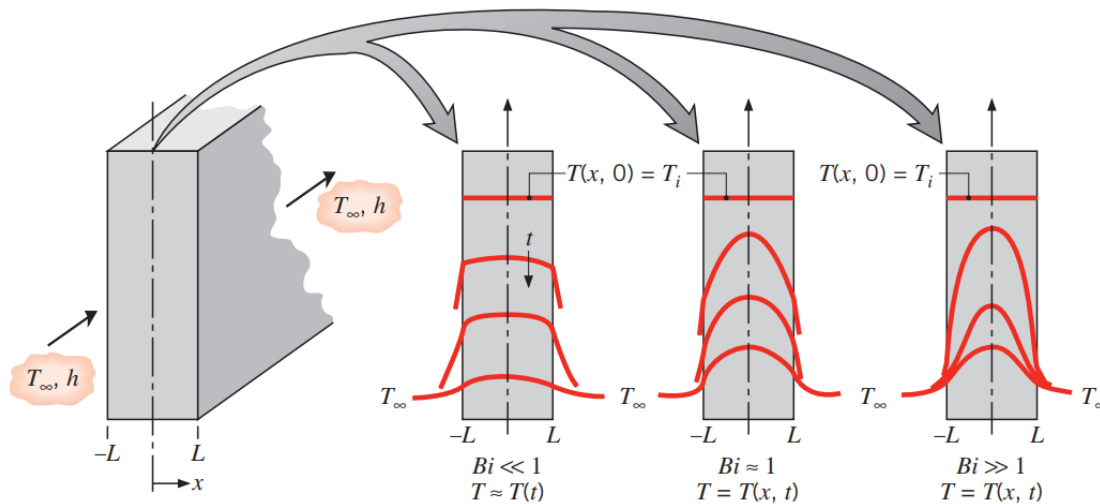


Figura 6. Distribuição de temperatura em regime transiente para diferentes números de Biot em uma parede plana resfriada simetricamente por convecção.

Desta forma, comparando os resultados apresentados na Fig. (5), com os previstos na literatura, Fig. (6), constatamos que ambos possuem o mesmo comportamento (tendência), para $Bi \approx 1$, descrevendo o mesmo fenômeno.

4.1. Análise numérica

Referente a análise numérica do comportamento do fenômeno, foram mantidos fixos os dados de entrada da Tab. (1), variando apenas os parâmetros considerados nos casos apresentados a seguir, sendo eles:

Variação da condutividade térmica (k):

Caso 1: $k = 1 \text{ W/(m.}^\circ\text{C)}$ – Figura (7)

Caso 2: $k = 50 \text{ W/(m.}^\circ\text{C)}$ – Figura (8)

Variação da Temperatura inicial (T_0):

Caso 3: $T_0 = 15\text{ }^\circ\text{C}$ – Figura (9)

Caso 4: $T_0 = 35\text{ }^\circ\text{C}$ – Figura (10)

Variação da Espessura (L):

Caso 5: $L = 0.15\text{ m}$ – Figura (12)

Caso 6: $L = 0.50\text{ m}$ – Figura (13)

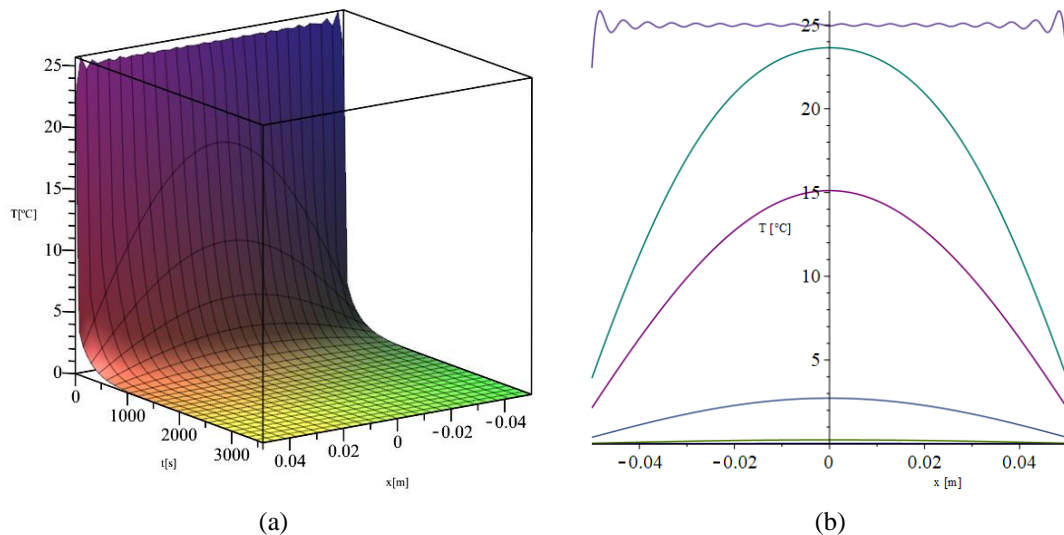


Figura 7. Caso 1: $k = 1\text{ W}/(\text{m}.\text{ }^\circ\text{C})$. (a) Gráfico de superfície T versus $t - x$. (b) Gráfico T versus x .

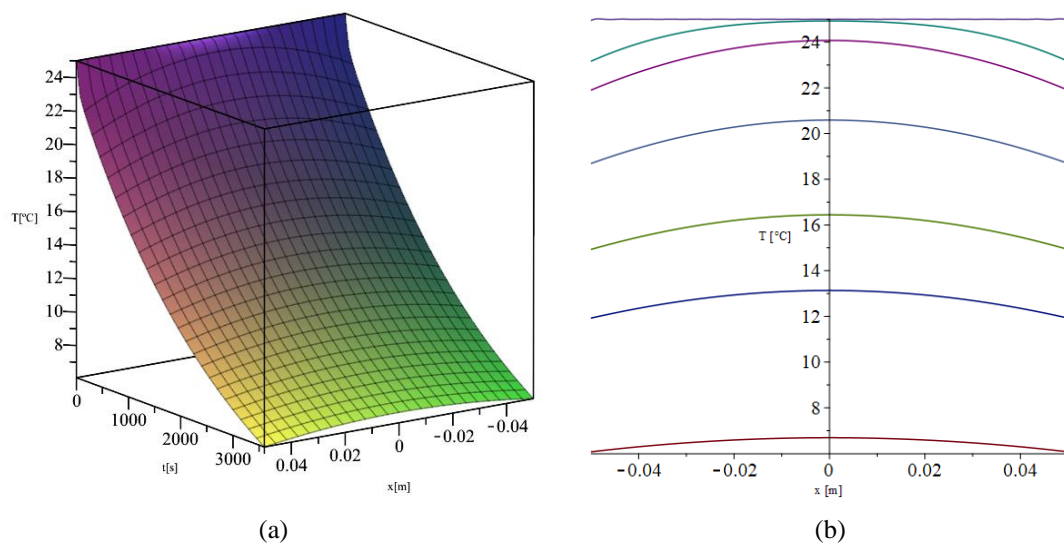


Figura 8. Caso 2: $k = 50\text{ W}/(\text{m}.\text{ }^\circ\text{C})$. (a) Gráfico de superfície T versus $t - x$. (b) Gráfico T versus x .

As Figuras (7) e (8) demonstram que a condutividade térmica é diretamente proporcional ao fenômeno de difusão de calor no meio, conforme indica a lei de Fourier.

Desta forma, quanto maior seu valor, mais rapidamente o corpo atingirá o equilíbrio térmico com a temperatura da vizinhança, e vice-versa.

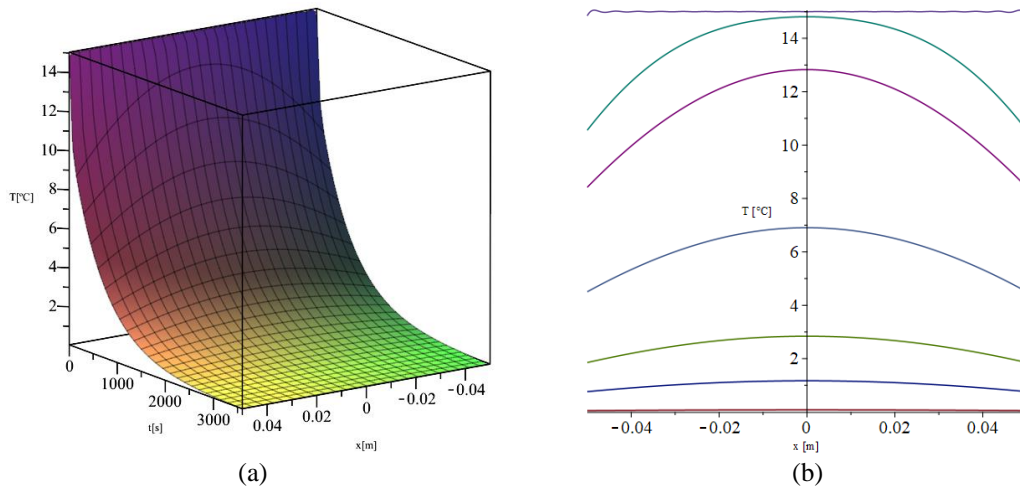


Figura 9. Caso 3: $T_0 = 15 \text{ }^\circ\text{C}$. (a) Gráfico de superfície T versus t - x. (b) Gráfico T versus x.

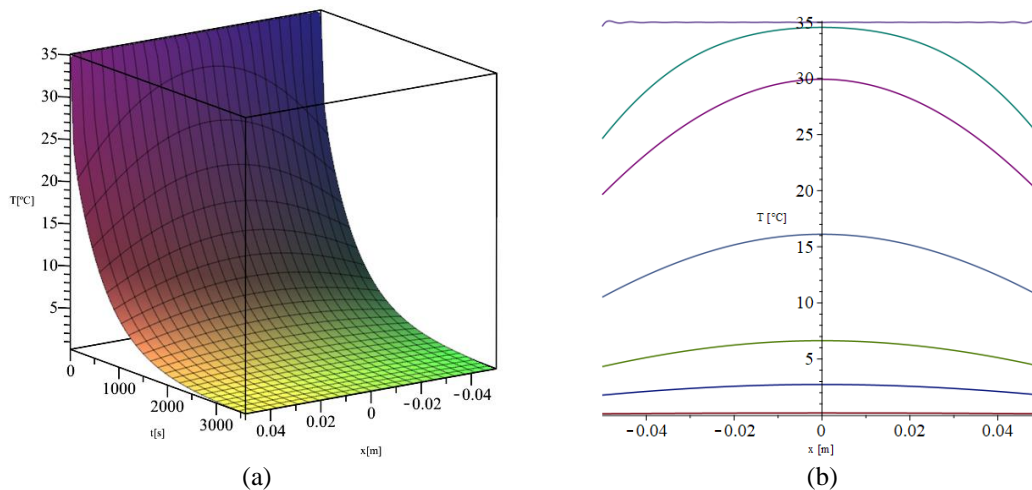


Figura 10. Caso 4: $T_0 = 35 \text{ }^\circ\text{C}$. (a) Gráfico de superfície T versus t - x. (b) Gráfico T versus x.

Referente a temperatura inicial, conforme apresentado nas Figuras (9) e (10), podemos constatar que ambas demonstram o mesmo comportamento, sendo a única diferença constatada o próprio parâmetro T_0 , diminuindo linearmente a diferença de temperaturas (ΔT).

Desta forma, se considerarmos o caso em que a temperatura inicial assume o mesmo valor da temperatura da vizinhança, teremos o comportamento ilustrado na Figura (11), no qual teremos um equilíbrio térmico permanente ($\Delta T = 0 \text{ }^\circ\text{C}$), ou seja, não ocorre o processo de transferência de calor.

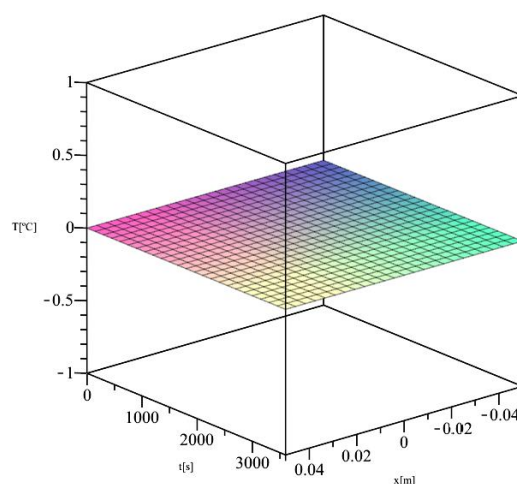


Figura 11. Gráfico T versus x para $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C} = T_\infty$.

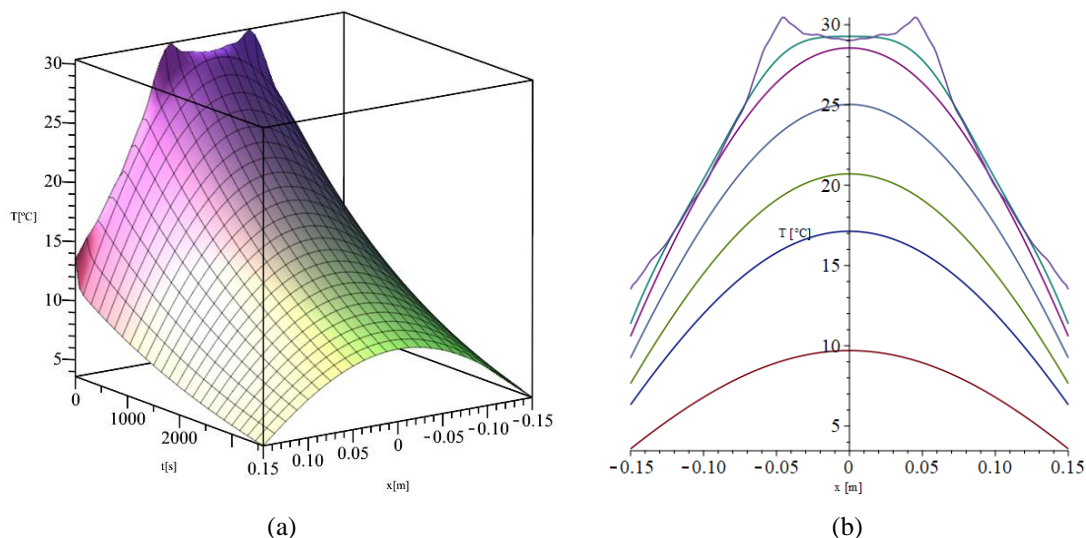


Figura 12. Caso 5: $L = 0.15$ m. (a) Gráfico de superfície T versus $t - x$. (b) Gráfico T versus x .

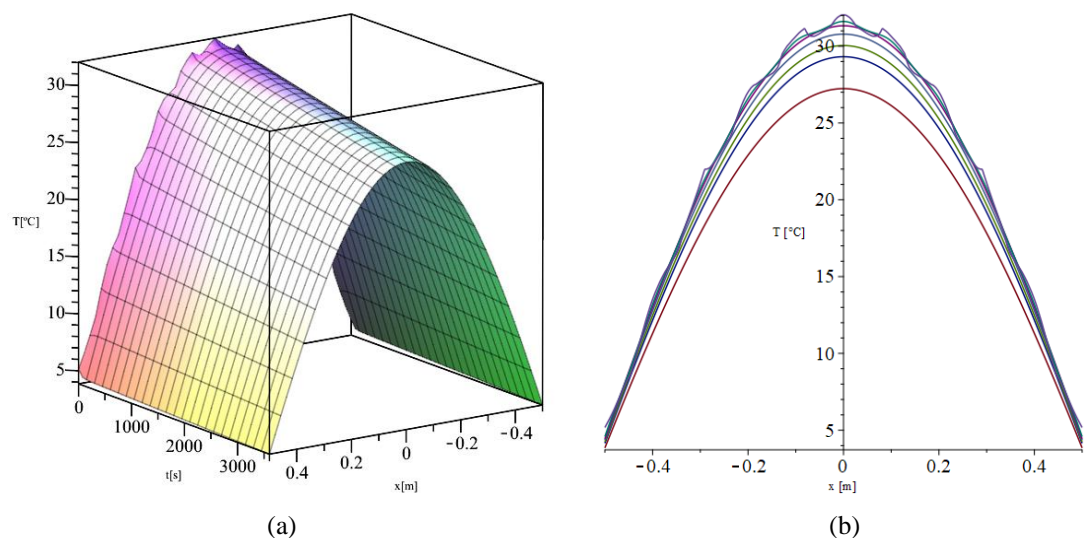


Figura 13. Caso 6: $L = 0.50$ m. (a) Gráfico de superfície T versus $t - x$. (b) Gráfico T versus x .

Por fim, nas Figuras (12) e (13) são apresentados os resultados para variação da espessura (L), constata-se que a mesma é inversamente proporcional ao fenômeno de difusão de calor no meio, conforme indica a lei de Fourier.

Outro fator a ser citado é referente ao número de Biot (neste caso, $Bi \gg 1$), em que podemos observar o mesmo comportamento dos resultados descritos na Fig. (6).

5. CONCLUSÕES

De modo geral, pode-se concluir que os objetivos desta pesquisa foram atingidos.

Os resultados apresentam boa concordância com os presentes na literatura, tendo os mesmos comportamentos e tendências, permitindo assim, a garantia de uma correta análise do fenômeno em estudo.

6. AGRADECIMENTOS

Agradecimentos são prestados à CAPES, à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da UTFPR, à Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e ao Departamento Acadêmico de Mecânica da UTFPR/Câmpus Ponta Grossa e do Câmpus Curitiba.

7. REFERÊNCIAS

Hahn, D. W.; ÖZISIK, M. N. "Heat Conduction", 3 Ed., New York: John Wiley & Sons, 2012.
Incropera, F. et al. "Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa", 7 Ed., Rio de Janeiro: LTC, 2014.

Frota, A. B.; SCHIFFER, S. R. “Manual de conforto térmico: arquitetura, urbanismo”, 5 Ed., São Paulo: Studio Nobel, 2001.
Kreyszig, E. “Advanced Engineering Mathematics”, 10 Ed., 2011.
Kakac, S. et al. “Heat Conduction”, 5 Ed., 2018.

8. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.