

USO DA TÉCNICA DE INFERÊNCIA BAYESIANA PARA ESTIMAR AS PROPRIEDADES TÉRMICAS DE UM MODELO

Thaise Alonso, thaise-alonso@hotmail.com¹

Gabriela Lima Menegaz, gabriela.menegaz@gmail.com¹

Gilmar Guimaraes, gguima@ufu.br¹

¹Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila 2121 – Bloco 1M – CEP 38400-902, Uberlândia – MG

Resumo. A detecção precoce do câncer de mama é essencial para reduzir a morbimortalidade associada a esta doença, comum em diversos países. Este trabalho consiste em uma das etapas do projeto que visa a aplicação do método de impedância térmica para detectar inclusões, que simulam os tumores, em modelos que mimetizam o tecido mamário. A impedância térmica é dada pela razão entre a variação da temperatura superficial e o fluxo de calor externo aplicado no modelo. Apesar do método detectar a inclusão, ainda é necessário desenvolver ferramentas que auxiliem na obtenção da posição e do tamanho das inclusões. O principal objetivo do trabalho em questão é estimar a condutividade térmica e a difusividade térmica de um modelo, por meio da utilização de Inferência Bayesiana. Assim, com estas informações será possível, posteriormente, identificar o tamanho e posição da inclusão presente no modelo do tecido mamário.

Palavras chave: Difusividade térmica, Condutividade térmica, Inferência bayesiana

Abstract. The early detection of breast cancer is essential to reduce the morbidity and mortality associated with this disease, common in several countries. This work consists of one of the stages of the project that aims to apply the thermal impedance method to detect inclusions, which simulate tumors, in models that mimic breast tissue. Thermal impedance is the ratio between the variation in surface temperature and the external heat flow applied to the model. Despite the method detecting inclusion, it is still necessary to develop tools that help to obtain the position and size of inclusions. The main objective of the work in question is to estimate the thermal conductivity and thermal diffusivity of a model, using Bayesian Inference. Thus, with this information, it will be possible, later, to identify the size and position of the inclusion present in the breast tissue model.

Keywords: Thermal diffusivity, Thermal conductivity, Bayesian inference

1. INTRODUÇÃO

O câncer é um problema de saúde pública em todo o mundo. Para o Brasil, estima-se que 66.280 casos novos de câncer de mama, para cada ano do triênio 2020-2022. Esse valor corresponde a um risco estimado de 61,61 casos novos a cada 100 mil mulheres (INCA, 2020).

Como os tumores são grupos de células que se multiplicam de maneira descontrolada, a taxa de geração de calor metabólico e a taxa de perfusão sanguínea do tumor são diferentes daquelas observadas nos tecidos saudáveis. O efeito dessa geração diferente dissipada no tecido circundante pode ser observado na temperatura superficial da mama. A identificação da variação de temperatura por termografia representa, portanto, uma boa alternativa para detectar a presença de um tumor mamário. O uso de imagens infravermelhas no estudo do câncer tem sido investigado por inúmeros pesquisadores, como Parisky *et al.* (2003), Arora *et al.* (2008), Ng *et al.* (2009), Kapoor e Prasad (2010) e Mitra e Balaji (2010).

A impedância térmica combinada com as técnicas de identificação de danos pode estabelecer um índice para indicar a presença de um tumor, sem exigir o conhecimento dos parâmetros físicos do tecido. A analogia entre impedância

eletromecânica e térmica representa uma nova abordagem para a detecção de inclusões (Menegaz e Guimarães, 2019; Menegaz *et al.*, 2019). Este método vem apresentando resultados promissores para a detecção das inclusões e para que o diagnóstico seja completo estão sendo desenvolvidas ferramentas para a determinação da posição e do tamanho da inclusão.

Segundo Figueiredo, Fernandes e Guimarães (2018), a posição de inclusão é determinada usando uma temperatura experimental da superfície de um modelo, com base apenas em um valor de referência para a condutividade térmica. Para detecção de inclusões e o seu posicionamento a partir do método de Inferência Bayesiana, é preciso estimar as propriedades térmicas do meio. Este trabalho tem o objetivo de estimar a difusividade e condutividade térmica de um modelo simplificado. Nesta etapa, não se considerou a influência do metabolismo e da perfusão sanguínea no modelo. Futuramente, para que o modelo proposto possa se assemelhar a um tecido humano será utilizada a equação de biotransferência de calor para contemplar tais influências. A seguir serão apresentados as simulações numéricas e o estudo do comportamento térmico do modelo.

1.1 Objetivos

O objetivo geral do trabalho é aplicar o Método de Inferência Bayesiana, visando a estimativa da condutividade e difusividade térmica para um modelo simplificado de uma amostra que no futuro mimetize um tecido humano. Desta forma, os objetivos específicos são descritos abaixo:

- Desenvolvimento de um modelo térmico que considere a imposição de um fluxo de calor na superfície da amostra e o isolamento térmico da superfície oposta.
- Aplicação das Funções de Green no desenvolvimento da solução do problema proposto.
- Estimativas da difusividade e condutividade térmica da amostra usando Inferência Bayesiana.
- Comparação entre os dados estimados e experimentais.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Modelo térmico

O modelo térmico unidimensional (X22) simplificado é utilizado para identificar a condutividade térmica e a difusividade térmica, como mostra a Fig.1. Nesse modelo aplica-se um fluxo de calor constante na superfície frontal da amostra enquanto a face oposta é mantida isolada. As temperaturas são, então, medidas na superfície, $x=0$.

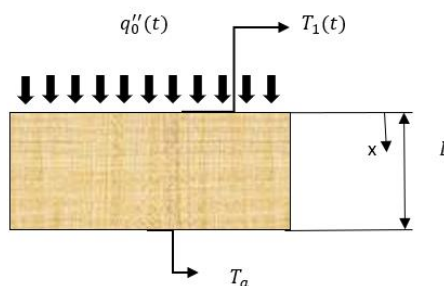


Figura 1. Modelo térmico transitório 1D.

Para a estimativa de propriedades térmicas faz-se necessário a obtenção da solução do problema direto. Este por sua vez permite o cálculo da temperatura teórica. O esquema mostrado na Figura (1) descreve o problema da transferência de calor cuja equação governante pode ser representada pela Eq. (1).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Sujeito às condições de contorno:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3)$$

A solução da Equação (1) pode ser obtida usando Funções de Green (Pennes, 1948):

$$T(x, t) = T_0 + \alpha \int_0^t G(x, t|0, \tau) \frac{q(\tau)}{k} d\tau \quad (4)$$

Onde:

$$G_{x21}(x, t|x', \tau) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \quad (5)$$

Assim, aplicando a Eq. (5) na Eq. (4), e considerando $q(t) = q_0$, obtém-se:

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q_0 \alpha}{k} \frac{1}{L} t + \frac{q_0}{k} L^2 \left(\frac{L}{3} - x + \frac{x^2}{2L} \right) - \frac{q_0}{k} \frac{2}{L} \sum_m^\infty \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t}}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} \quad (6)$$

2.2. Simulação Numérica da Temperatura

A comparação entre a temperatura superficial calculada pelo modelo X22 e dados experimentais permite estimar os parâmetros envolvidos. Os dados de temperatura experimentais foram obtidos a partir de simulação numérica no *software* COMSOL de uma placa com fluxo de calor prescrito em uma superfície e isolamento térmico na superfície oposta.

Para obter o perfil de temperatura superficial utilizou-se um fluxo de calor constante $q(t) = 1000 \text{ W/m}^2$, temperatura inicial, $T_0 = 30 \text{ °C}$, isolamento térmico na em $L = 15 \text{ mm}$ e adicionou-se erros aleatórios com desvio padrão = 0.15 °C . Os dados obtidos são apresentados na Fig.(2).

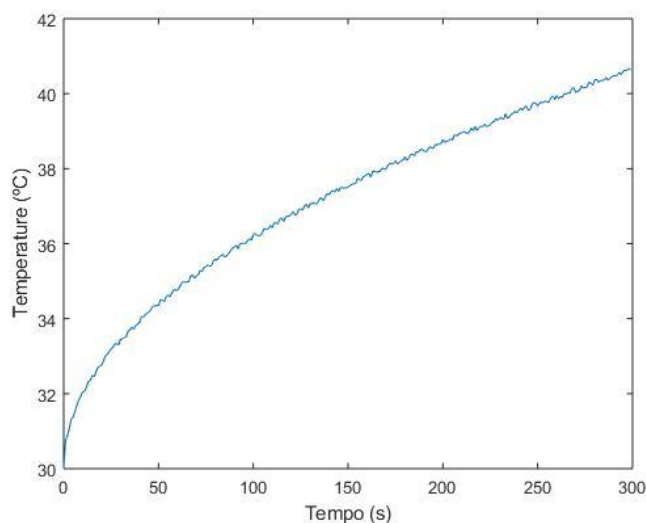


Figura 2: Temperatura obtida numericamente.

2.3. Procedimentos inversos baseados na abordagem de Inferência Bayesiana

As estatísticas bayesianas estudam a probabilidade de uma hipótese a partir de informações obtidas e de conhecimentos prévios. A base da inferência bayesiana é a fórmula de Bayes (Kaipio e Somersalo, 2005):

$$P(\beta|Y) = \frac{P(Y|\beta)P(\beta)}{P(Y)} \quad (7)$$

Onde, β é usado para representar uma hipótese e Y significa uma observação relacionada a essa hipótese. $P(\beta|Y)$, $P(Y|\beta)$ e $P(\beta)$ são chamadas de função de densidade de probabilidade posterior (PPDF), função de verossimilhança e função de densidade de probabilidade anterior (PDF), respectivamente. A probabilidade posterior de uma hipótese dada algumas observações (evidências) são proporcionais ao produto de sua probabilidade e probabilidade anterior (incondicional). A Inferência Bayesiana fornece técnicas poderosas para estimativa, teste de hipóteses, seleção de modelos e problemas de decisão.

A variável β que representa o parâmetro desconhecido no problema de condução inversa de calor pode ser tratado como um processo aleatório e a estimativa bayesiana pode ser usada para calculá-lo. O procedimento proposto neste trabalho é estimar o β_i ($\beta_i = \alpha$ e k) através da aplicação do teorema de Bayes, sendo a solução do problema de estimação de parâmetros dada por a maximização da função de verossimilhança, representada na Eq. (8)

$$l(\beta|Y) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left[-\frac{(\theta(0, t, \beta) - Y(0, t))^2}{2\sigma^2} \right] \quad (8)$$

3. ESTIMATIVA DAS PROPRIEDADES TÉRMICA

Uma vez que as propriedades térmicas presentes na Eq.(7) não são conhecidas, propõe-se, aqui, o uso de técnicas estatísticas como a Inferência Bayesiana para a sua obtenção. Essa inferência, por sua vez, necessita do uso da técnica de Monte Carlo. A seguir é descrito o procedimento usado para as estimativas.

3.1. Método de Monte Carlo

O Método de Monte Carlos produz seus resultados com bases em simulações obtidas através de dados amostrais, simplificando assim o cálculo de equações diferenciais complexas. Para que o sistema físico seja modelado pelo Método de Monte Carlo é necessário representa-lo por funções densidade de probabilidade.

A função densidade de probabilidade é constituída por valores que seguem uma determinada distribuição, utilizando duas classes de valores: os possíveis resultados e a a probabilidade de cada resultado acontecer. Ao definir a distribuição de probabilidade que melhor caracteriza o comportamento estudado, é necessário gerar valores aleatórios de acordo com a distribuição. Esse processo é produzido diversas vezes e o resultado esperado é obtido por meio de técnicas estatísticas. (Paula, 2014)

3.2. Estimativa da difusividade térmica

O procedimento proposto para estimar a difusividade térmica é baseado em sua definição. Desde que α é diretamente proporcional ao tempo de difusão de calor, essa propriedade pode ser obtida avaliando-se a temperatura entre dois tempos diferentes. Observando a Equação (8), conclui-se que a relação de temperatura entre dois tempos diferentes, por exemplo, $T(t_2)/T(t_1)$ é proporcional a função Green nesses momentos. Isso significa que a taxa de temperatura não depende da condutividade térmica, mas apenas da difusividade térmica. Assim, uma função de probabilidade baseada na razão das temperaturas da superfície entre dois tempos, $T(t_2)/T(t_1)$, pode ser proposto para estimar a difusividade térmica. Entretanto, somente com as temperaturas na posição inicial, o problema não apresenta sensibilidade para o cálculo simultâneo da difusividade e condutividade. Por isso, faz necessário o conhecimento da condutividade. O valor ótimo de difusividade térmica será ajustado às temperaturas teóricas e experimentais. A Tabela (1) apresenta o resumo do processo de estimativa de α .

Tabela 1. Estimativa da difusividade térmica, considerando $T_1 = T$ (50s), $T_2 = T$ (100s), $k = 0,812$ W/mK.

N	α [m ² /s]
100	$1,937 \cdot 10^{-7}$
200	$1,944 \cdot 10^{-7}$
300	$1,945 \cdot 10^{-7}$
500	$1,945 \cdot 10^{-7}$
1000	$1,945 \cdot 10^{-7}$

3.3. Estimativa da condutividade térmica

A condutividade térmica (k) é estimada maximizando a função de probabilidade entre os dados teóricos e experimentais de temperatura. Como o valor de α , é possível calcular o valor de k a partir da maximização de uma nova função de probabilidade. Esta função é, agora, baseada na função de erro quadrático da temperatura teórica e experimental no modelo, apresentada na Eq. (9). A Tabela 2 apresenta o resumo do processo de estimativa k :

$$l(k|Y) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left[-\frac{(\theta(0, t, k|\sigma = 1,945 \cdot 10^{-7}) - Y(0, t))^2}{2\sigma^2} \right] \quad (9)$$

Tabela 2. Estimativa da condutividade térmica com $\alpha = 1,945 \cdot 10^{-7}$ m²/s

N	k [W/mK]
100	0,7955
200	0,8286
300	0,8129
500	0,8129
1000	0,8129

Observa-se que com o aumento do número de interações, os valores estimados de condutividade térmica tendem a se estabilizar. A Figura 3 apresenta a comparação entre a temperatura estimada e a temperatura experimental para os tempos iniciais inferiores a 300 s.

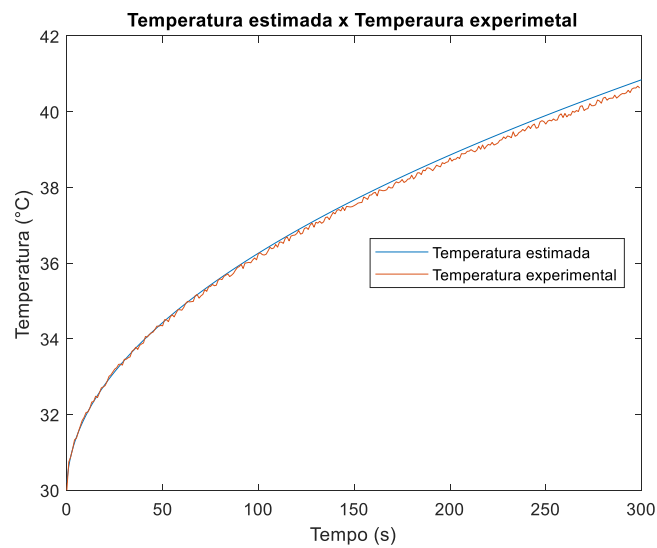


Figura 3. Comparação entre temperatura teórica e experimental

A Figura (3) ilustra o comportamento das temperaturas estimada e experimental em função do tempo. Observa-se que o comportamento entre as duas temperaturas apresenta boa concordância. A Figura (4) apresenta a diferença entre as duas curvas, obtendo-se um desvio inferior a 0,2 °C.

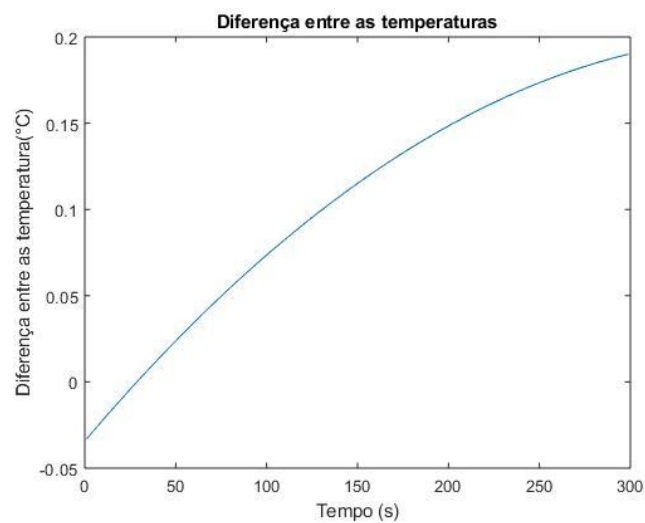


Figura 4. Diferença entre as temperaturas.

4. CONCLUSÃO

Propôs-se neste trabalho, um estudo de modelagem térmica para a estimativa das propriedades de condutividade e difusividade térmica de um modelo. Observou-se que o uso da técnica de Inferência Bayesiana foi capaz de estimar os valores de condutividade e difusividade térmica, a partir das considerações feitas para as simulações. Esse modelo, futuramente, deverá simular um tecido mamário com inclusões a terem sua localização e tamanho determinados. Embora em uma aplicação prática esteja presente uma geometria tridimensional, a técnica proposta neste trabalho, sem perda de generalidade, utilizou um modelo térmico transitório unidimensional.

4. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas (ABCM), aos órgãos de fomento (FAPEMIG, CNPq e CAPES) e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica/UFU pelo apoio. Agradecem também ao Laboratório de Transferência de Calor: Modelagem e Experimento (LTCME), ao Laboratório de Projetos Mecânicos (LPM), ao Centro de Inovação Tecnológica em Esportes Paraolímpicos (CINTESP) e ao Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst).

5. REFERÊNCIAS

- Arora, N., Martins, D., Ruggerio, D., Tousimis, E., Swistel, A. J., Osborne, M. P., & Simmons, R. M. (2008). Effectiveness of a noninvasive digital infrared thermal imaging system in the detection of breast cancer. *The American Journal of Surgery*, 196(4), 523-526.
- Figueiredo, A. A. A., Fernandes, H. C., & Guimaraes, G. (2018). Experimental approach for breast cancer center estimation using infrared thermography. *Infrared Physics & Technology*, 95, 100-112.
- INCA. Estatísticas de câncer. 2020. Disponível em: <https://www.inca.gov.br/numeros-de-cancer>. Acesso em: 22 jan. 2021
- Kaipio, J., & Somersalo, E. (2005). *Statistical and computational inverse problems* (Vol. 160). Springer Science & Business Media.
- Kapoor, P., Prasad, SVAV, 2010, Image processing for early diagnosis of breast cancer using infrared images. *Proceedings of 2nd International Conference on Computer and Automation engineering*, 26 Feb. 2010–28 Feb. 2010
- Menegaz, G. L., & Guimarães, G. (2019). Development of a new technique for breast tumor detection based on thermal impedance and a damage metric. *Infrared Physics & Technology*, 97, 401-410.
- Menegaz, G. L. (2018). Uso dos métodos de impedância eletromecânica e térmica para a detecção de inclusões visando a aplicação em tumores mamários.
- Mitra, S., & Balaji, C. (2010). A neural network based estimation of tumour parameters from a breast thermogram. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53(21-22), 4714-4727.
- Paula, R. R. D. (2014). *Método de Monte Carlo e aplicações*.
- Parisky, Y. R., Sardi, A., Hamm, R., Hughes, K., Esserman, L., Rust, S., & Callahan, K. (2003). Efficacy of computerized infrared imaging analysis to evaluate mammographically suspicious lesions. *American Journal of Roentgenology*, 180(1), 263-269.
- Ng, E. Y. K., Tan, H. M., & Ooi, E. H. (2009). Boundary element method with bioheat equation for skin burn injury. *Burns*, 35(7), 987-997.
- Pennes, H. H. (1948). Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm. *Journal of applied physiology*, 1(2), 93-122.

6. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.