

## APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO NA DETERMINAÇÃO DO MÓDULO DE ENGRENAGENS HELICOIDAIS USADAS EM UM REDUTOR DE VELOCIDADE

Eric José Pereira de Lucena, [ericlucena01@hotmail.com](mailto:ericlucena01@hotmail.com)<sup>1</sup>

José Carlos de Lima Júnior, [jclj@academico.ufpb.br](mailto:jclj@academico.ufpb.br)<sup>2</sup>

João Bosco de Aquino Silva, [joao.bosco@academico.ufpb.br](mailto:joao.bosco@academico.ufpb.br)<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Universidade Federal da Paraíba (UFPB), Campus I, Laboratório de Engenharia de Precisão (LEP), Departamento de Engenharia Mecânica (DEM), Cidade Universitária, CEP:58051-900 – João Pessoa – PB – Brasil.

**Resumo.** Em um projeto para o dimensionamento de engrenagens helicoidais, um dos principais parâmetros a serem definidos pelo projetista é a escolha do módulo da engrenagem, pois o mesmo irá influenciar no tamanho de cada engrenagem e consequentemente nas dimensões do redutor de velocidade. Desta forma, limitações geométricas, ou seja, de espaço geralmente estão presentes no dia a dia dos projetistas. Com o objetivo de auxiliar o projetista no processo da escolha do módulo, o presente trabalho utilizou a técnica de otimização para a determinação do melhor módulo que o projeto deve ter. A escolha é feita com base nos seguintes parâmetros de projeto: potência requerida, rotação do pinhão, relação de transmissão, fator de segurança e espaço disponível para a montagem do redutor. Uma vez que o sistema define o melhor módulo, o valor encontrado é comparado com módulos recomendados na literatura. Os resultados apresentados pelo sistema desenvolvido são satisfatórios, pois permite ao projetista selecionar o módulo com base nas restrições de projeto impostas.

**Palavras-chave:** Engrenagens, Módulo. Otimização

**Abstract.** In a project to design helical gears, one of the main parameters to be defined by the designer is the gear module, as it will influence the size of this mechanical element at the end of the project. Therefore, geometrical limitations, that is, space, are usually present in designers' daily lives. To contribute to the choice of module, this article used the optimization technique to determine the best gear module the project should have. The choice is made based on the following project parameters: required power, pinion rotation, transmission ratio, security factor and space available for mounting the gearbox. Once the system defines the best module, the resulting value is compared with recommended modules in literature. The results showed by the developed system are satisfactory, as it allows the designer to select a module based on imposed project constraints.

**Keywords:** Gear, Module, Optimization

### 1. INTRODUÇÃO

A maioria das máquinas na indústria produzem movimentos lineares e/ou rotativos para realizarem a sua função requerida e para isso necessitam de motores para fornecer potência aos seus componentes. Porém, na maior parte dos casos, a rotação de projeto que um sistema necessita não é igual aos valores fornecidos pelos motores do mercado (Jelaska, 2012). Entretanto, existem várias formas de contornar essa situação, as quais destacam-se o uso de sistemas de redução com o uso de correntes, correias planas ou dentadas, volantes de atrito e engrenagens. Caso faça-se necessário que a potência seja transmitida com elevada eficiência, com sincronismo adequado, em alta velocidade e de maneira suave, a solução mais adequada seria utilizar engrenagens, compondo um redutor de velocidades (Collins, Busby e Staab, 2019). Um redutor de velocidade é formado por pelo menos um trem de engrenagem simples, podendo ser composto caso haja mais eixos com mais de uma engrenagem e permite adequar a velocidade de entrada fornecida pelo motor para a requerida pela máquina (Norton, 2013).

Com base na literatura diversos parâmetros devem ser levados em consideração no dimensionamento das engrenagens. Alguns desses parâmetros são definidos em função da carga que se deseja transmitir e outros são escolhidos a critério do projetista. Dentre os parâmetros a serem escolhidos pelo projetista um que merece destaque é o módulo das engrenagens, pois o mesmo é a base do dimensionamento das engrenagens e o seu valor irá influenciar no tamanho que as engrenagens terão e consequentemente no tamanho que o sistema de redução como um todo.

O presente trabalho aplicou a técnica de otimização para a determinação do módulo que o par de engrenagens deve

ter, a fim de suportar as cargas impostas tais como: potência a transmitir, rotação do pinhão, relação de transmissão e altura disponível, ou seja, o espaço físico disponível. Convém ressaltar que essas cargas impostas irão gerar tensões e serão influenciadas pelo módulo.

## 2. O MÓDULO DAS ENGRENAGENS

Segundo Mazzo (2013), o módulo ( $m$ ) de uma engrenagem é definido como a relação entre o diâmetro ( $d$ ) e o número de dentes ( $Z$ ). (Ver Eq. (1)). Portanto, o valor do módulo, que é dado em milímetros, define o tamanho do dente.

$$m = \frac{d}{z} \quad (1)$$

Childs (2014), mostra a influência do módulo no tamanho do dente na Fig. (1). Segundo Budynas, R. G., Nisbett (2016), os módulos usualmente utilizados são os apresentados na Tab. (1).

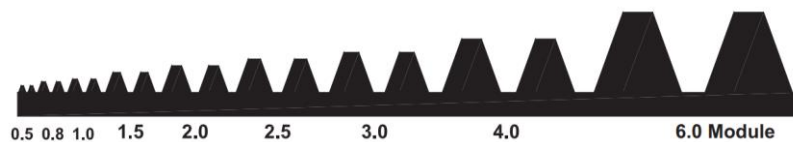


Figura 1. Influência no tamanho do dente em função do módulo

Tabela 1. Módulos em mm

Módulos	
Preferidos	1; 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 16; 20; 25; 32; 40; 50.
Escolha subsequente	1,125; 1,375; 1,75; 2,25; 2,75; 3,5; 4,5; 5,5; 7; 9; 11; 14; 18; 22; 28; 36; 45.

O módulo a ser considerado neste trabalho são os preferidos. Então surge a seguinte questão: Qual o valor de módulo devo utilizar em um projeto de engrenagens? A resposta não é simples, pois essa escolha irá influenciar tanto no tamanho do redutor como nos valores das tensões que as engrenagens estão submetidas. Assim, para tentar eliminar ao máximo o retrabalho por parte do projetista aplicou-se a otimização para a determinação do módulo com base em alguns parâmetros de projeto.

## 3. OTIMIZAÇÃO

Segundo Brasil e Silva (2019), o processo tradicional na busca de soluções para um dado projeto é baseado na análise de diversas soluções e na viabilidade de sua execução. Nesse processo não existe uma maneira formal de aprimorar um projeto. Observa-se que esse método depende fortemente da intuição, experiência e habilidade do projetista. Com o objetivo de aperfeiçoar os projetos técnicas de otimização são aplicadas para esse fim.

Otimização pode ser definida como o processo de se determinar entre várias opções aquela que é a melhor possível dentro de certos critérios de escolha e limitações, com os recursos disponíveis. Essa é praticamente a definição de projeto ótimo (Brasil e Silva, 2019).

Um problema de otimização pode ser representado por uma única função objetivo ou por várias. Uma função objetivo é uma expressão matemática de um critério de desempenho, como por exemplo o custo de um produto, o lucro de uma empresa etc. Uma vez definido onde deve ser aplicada a otimização, procura-se definir a equação que relaciona os parâmetros a serem otimizados, ou seja, essa equação é a função objetivo. A escolha dessa função está diretamente ligada à natureza do problema (Rao, 2009).

Resumidamente, o processo de otimização busca maximizar ou minimizar a função objetivo que vai caracterizar o problema a ser resolvido. Cada sistema é caracterizado por restrições. Essas restrições podem ser lineares, não lineares, de igualdade e/ou desigualdade. A Equação (2), mostra de forma geral uma função que precisa ser minimizada com base em suas restrições (Kochenderfer e Mykel, 2019).

$$\min_x f(x) \text{ tal que } \begin{cases} c(x) \leq 0 \\ c_{eq}(x) = 0 \\ A \cdot x \leq b \\ A_{eq} \cdot x = b_{eq} \\ l_b \leq x \leq u_b \end{cases} \quad (2)$$

Onde:

- $x$  é um ponto de projeto, que pode ser representado por um vetor, o qual armazena os valores dos demais parâmetros do modelo;
- $A$  é um vetor o qual possui os coeficientes das restrições de desigualdade,  $b$  é um vetor que guarda os valores do segundo membro das desigualdades,
- $A_{eq}$  é um vetor contendo os coeficientes das restrições de igualdade,  $b_{eq}$  mantém os valores do segundo membro das igualdades,
- $c(x)$  e  $c_{eq}(x)$  representam as restrições não-lineares de desigualdade e igualdade, respectivamente.
- $l_b$  e  $u_b$  são vetores contendo os respectivos limites inferior e superior do domínio do ponto de projeto.

Na Figura (2), pode ser visualizado o fluxograma do processo de otimização.

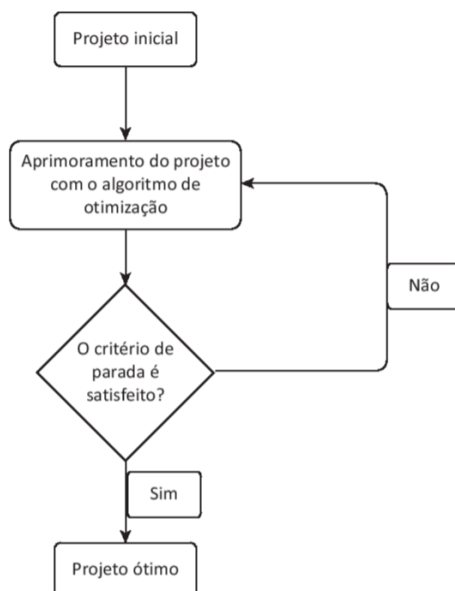


Figura 2. Fluxograma genérico de um processo de otimização (Brasil e Silva, 2019).

## 4. METODOLOGIA

O problema a ser resolvido neste trabalho é a determinação do módulo de um sistema de engrenagens helicoidais que atenda os seguintes parâmetros de projeto:

- Potência a ser transmitida;
- Rotação do pinhão;
- Relação de transmissão;
- Fator de segurança desejado
- Altura máxima disponível  $H$ . Na Figura (3), é possível ver essa dimensão.

### 4.1. Função Objetivo

Para esse estudo, a função objetivo utilizada foi a Eq. (3), que relaciona a altura que o redutor deve ter com o módulo normal das engrenagens. Dessa forma, busca-se minimizar a altura do redutor em função do módulo de modo que os demais requisitos, como relação de transmissão, potência inicial e rotação, possam ser suportados pelo conjunto sem que ocorram falhas prematuras. Para que esses requisitos sejam atendidos, é necessário fazer uso de restrições, pois é através delas que as respostas para o problema são consideradas aceitáveis, elas fazem com que o problema ofereça resultados coerentes com a realidade

$$Altura = m_h \left( \frac{Z_2 + Z_3}{\cos \psi} \right) \quad (3)$$

Onde:  $Z_2$  e  $Z_3$  são os números de dentes do pinhão e da coroa, respectivamente;  $\psi$  é referente ao ângulo de hélice das engrenagens e  $m_n$  representa o módulo normal, pois é o utilizado para engrenagens helicoidais

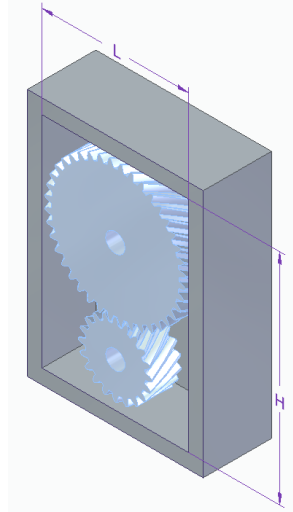


Figura 3. Esquema do sistema a ser otimizado

#### 4.2. Restrições

As restrições usadas para a solução desse projeto foram restrições lineares e não lineares. Como restrição linear, está sendo utilizada a altura disponível do local onde será colocado o redutor, cuja finalidade é limitar as dimensões das engrenagens helicoidais, uma vez que a soma dos diâmetros do pinhão e da coroa deve ser igual ou menor que essa altura, fornecida previamente no início do problema. A expressão de restrição linear usada foi uma inequação, pois a altura final deve ser igual ou menor que a altura disponível, e está representada na Eq. (4). Além disso, essa expressão deve ser dada em função da variável a ser otimizada, que é o módulo normal. As restrições de igualdade não são utilizadas nesse problema, pois elas limitam o modelo a entregar um módulo que resulte exatamente no valor de altura fornecido, impedindo que possa ser encontrado redutores com alturas menores que também supram a necessidade.

$$m_n \left( \frac{Z_2 + Z_3}{\cos \psi} \right) \leq \text{Altura disponível.} \quad (4)$$

Por outro lado, nas restrições não-lineares são utilizadas as expressões dos coeficientes de segurança, referentes às tensões de flexão e de contato de cada elemento do par. Por definição, o coeficiente de segurança pode ser entendido como a razão entre a tensão admissível e a tensão de trabalho. Esse fator deve ser maior que um valor pré-determinado ou pelo menos maior que 1. Com base nisso, para essas restrições foram atribuídas as expressões do fator de segurança de flexão e de contato, onde o valor mínimo que pode ser assumido é definido pelo projetista. Assim, como nas restrições lineares, a variável de otimização deve ser explicitada nas equações.

As Equações (5) e (10) são referentes às tensões de flexão e contato das engrenagens, respectivamente. Ao observar a Eq. (5), verifica-se que a mesma é em função de outros parâmetros (Eqs. (6) a (9)) que por sua vez estão em função de parâmetros como o módulo, potência, rotação do pinhão e ângulo de hélice. O mesmo acontece com a Eq. (10), que por sua vez os demais parâmetros são obtidos com base nas Eq. (11) a (15).

$$(\sigma_F)_{\text{helicoidal}} = K_{1h} \left( \frac{C_1 C_2}{C_3} \right) \quad (5)$$

Onde:

$$C_1 = \left( \frac{60 \cdot 10^3 \cdot \text{Pot} \cdot \cos \psi}{\pi m_n Z_h n_{ph}} \right) \left( A_h + \sqrt{\frac{200 \pi n_h m_n Z_h}{\cos \psi \cdot 60 \cdot 10^3}} \right)^{B_h} \quad (6)$$

$$C_2 = 1.0895 + \left( \frac{2\pi}{10 \tan \psi} \right) * Z_2 + \frac{4.92 \cdot 10^{-4} * 2\pi m_n n_h}{\tan \psi * \cos \psi} + \frac{0.0158 * 2\pi m_n n_h}{\tan \psi * \cos \psi * 25.4} - 0.93 * 10^{-4} * \frac{2\pi m_n n_h}{\tan \psi * \cos \psi * 25.4} \quad (7)$$

$$C_3 = \frac{2\pi m_h n_h^2}{\tan \psi (\cos \psi)^2} \quad (8)$$

$$K_{1h} = \frac{K_0 K_S K_B}{Y_J} \quad (9)$$

$$(\sigma_c)_{helicoideal} = K_{2h} \sqrt{\frac{C_1 C_2}{C_3 * F}} \quad (10)$$

Onde:

$$K_{2h} = Z_E (K_0 K_S Z_R)^{1/2} \quad (11)$$

$$F = \frac{\cos \Phi_t * \sin \Phi_t * m_g}{2 * mN * (m_g + 1)} \quad (12)$$

$$mN = \frac{pN}{0.95Z} \quad (13)$$

$$pN = \pi m_h n_h \cos \Phi_n \quad (14)$$

$$Z = \sqrt{\left(\frac{m_h n_h Z_2}{2 \cos \psi} + m_h n_h\right)^2 - \left(\frac{m_h n_h Z_2 \cos \Phi_t}{2 \cos \psi}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{m_h n_h Z_3}{2 \cos \psi} + m_h n_h\right)^2 - \left(\frac{m_h n_h Z_3 \cos \Phi_t}{2 \cos \psi}\right)^2} - \left(\frac{m_h n_h Z_2 + m_h n_h Z_3}{2 \cos \psi}\right) \sin \Phi_t \quad (15)$$

Onde:  $P_{ot}$  é a potência em kW,  $n_h$  é a rotação em rpm,  $m_g$  é a relação de transmissão,  $Z_2$  é o número de dentes do pinhão,  $Z_3$  é o número de dentes da coroa,  $\Phi_n$ ,  $\Phi_t$  e  $\psi$  são os ângulos de pressão normal, de pressão transversal e o de hélice, respectivamente. As variáveis  $A_h$ ,  $B_h$ ,  $K_{1h}$  e  $K_{2h}$  são fatores de correção da tensão que dependem de parâmetros geométricos e do tipo de carregamento, não possuindo relação com o módulo  $m_h$ .

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

O modelo de utilizado nesse estudo foi desenvolvido no software MATLAB, no qual foi aplicada uma função de otimização com restrições. Tal função possui como base a Eq. (2), ou seja, é possível definir as restrições de igualdade, desigualdade, limites superior e inferior do domínio da variável a ser otimizada e as restrições não-lineares. Dessa forma, foram passadas à função mencionada a função objetivo; os limites do domínio do módulo; as equações de restrição, porém apenas as de desigualdade como explicado anteriormente; e as restrições não-lineares. Após inseridas todas essas informações, o modelo necessita que sejam fornecidos os parâmetros do problema, que são potência, altura disponível, relação de transmissão e a rotação, para que possa então ser executado.

Para que fossem realizadas as análises usando o modelo, alguns parâmetros que não possuíam relação com o módulo tiveram de ser fixados. O ângulo de pressão normal foi definido em 20°, o ângulo de hélice escolhido foi de 30°. No cálculo da tensão de flexão existe o fator de borda  $K_B$ , que serve para corrigir o valor da tensão de modo que a espessura da borda seja suficiente para suportar a raiz do dente e não ocorra falha enquanto estiver sujeita a carregamentos. Por questões de simplificação, nesse estudo esse fator foi considerado unitário, tanto para o pinhão quanto para a coroa. Foi considerado também que as engrenagens são de Aço Endurecido por completo, sendo grau 2 para o pinhão, com dureza Brinell é igual a 370 HB, e grau 1 para a coroa, cuja dureza Brinell é de 300 HB, segundo as tabelas presentes em Budynas e Nisbett (2016).

O modelo de otimização proposto recebe como dados de entrada os valores de potência em kW, rotação em rpm, relação de transmissão, fator de segurança desejado e a altura disponível do local onde será posicionado o redutor. Os números de dentes não são fornecidos ao modelo, pois, como é buscado minimizar o espaço ocupado, o programa computacional define esses valores através do cálculo da interferência, ou seja, os números de dentes são os mínimos aceitáveis para as condições impostas. Da mesma forma é feito para as demais variáveis, o sistema computacional calcula de modo a utilizar o menor valor.

Como forma de demonstrar o funcionamento do modelo, foram realizadas simulações e alguns dos resultados estão abaixo, como pode ser observado na Tab. (1). Nesta tabela tem-se os dados de entrada que podem ser fornecidos pelo projetista, bem como os resultados fornecidos pelo sistema computacional.

Ao observar os resultados mostrados na Tab. (1), é possível perceber que o modelo é capaz de atender a todas as restrições impostas, apresentando sempre uma folga entre a altura disponível e a calculada. Nota-se que é possível até mesmo aprimorar o valor do fator de segurança, como visto no Projeto 1, pois a restrição exigia pelo menos 1,5 e o modelo entregou um sistema com 2,45 e com uma folga de 10,57 mm. No Projeto 2 era esperada que o espaço restante fosse menor do que no exemplo anterior, pois a transmissão necessária e potência transmitida aumentaram, entretanto, para a mesma altura disponível foi encontrado um sistema compatível. O Projeto 3 solicitou que fosse transmitida a mesma potência, contudo, necessitava apenas metade da velocidade no eixo de saída, logo, o sistema optou por entregar engrenagens com maior robustez, o que conteve o aumento na altura do redutor, explicando a razão de resultar no módulo de 6 mm.

As tensões de trabalho das engrenagens também devem ser levadas em consideração durante essa análise, pois é através delas que é definido se o par é adequado para o problema. Na figura abaixo estão contidos quatro gráficos, que apresentam como se comportam os valores de tensão para cada elemento do conjunto à medida que o módulo varia. Neles também estão presentes os valores das tensões admissíveis de cada engrenagem, com isso é possível observar qual valor de módulo é aceitável para o problema. A Figura (4) foi gerada considerando os dados do Projeto 1.

Tabela 2. Resultados das simulações.

<b>Parâmetros definidos pelo projetista – PROJETO 1</b>				
Potência [kW]	Rotação [rpm]	Relação de Transmissão	Altura disponível[mm]	Fator de Segurança
5	3530	3	300	1,5
<b>Parâmetros determinados na otimização</b>				
	Módulo	Altura [mm]	Fator de Segurança	
	5,5	279,43	2,45	
<b>Parâmetros definidos pelo projetista – PROJETO 2</b>				
Potência [kW]	Rotação [rpm]	Relação de Transmissão	Altura disponível[mm]	Fator de Segurança
7,5	3530	4	300	1,5
<b>Parâmetros determinados na otimização</b>				
	Módulo	Altura [mm]	Fator de Segurança	
	4,5	285,78	1,56	
<b>Parâmetros definidos pelo projetista – PROJETO 3</b>				
Potência [kW]	Rotação [rpm]	Relação de Transmissão	Altura disponível[mm]	Fator de Segurança
7,5	3035	2	300	1,5
<b>Parâmetros determinados na otimização</b>				
	Módulo	Altura [mm]	Fator de Segurança	
	6	207,84	1,97	

Ao analisar os gráficos (Fig.(4)), é possível notar que à medida que o módulo aumenta, os valores das tensões seguem diminuindo até se aproximar de zero, porém não se anulam enquanto houver uma carga aplicada nas engrenagens. Através desses comportamentos, percebe-se que a razão pela qual é associado o módulo com a resistência da engrenagem. Observando os gráficos também é possível identificar a partir qual valor as tensões diminuem ao ponto de ficarem menores que os valores admissíveis, permitindo saber quais módulos não se adequam ao problema proposto.

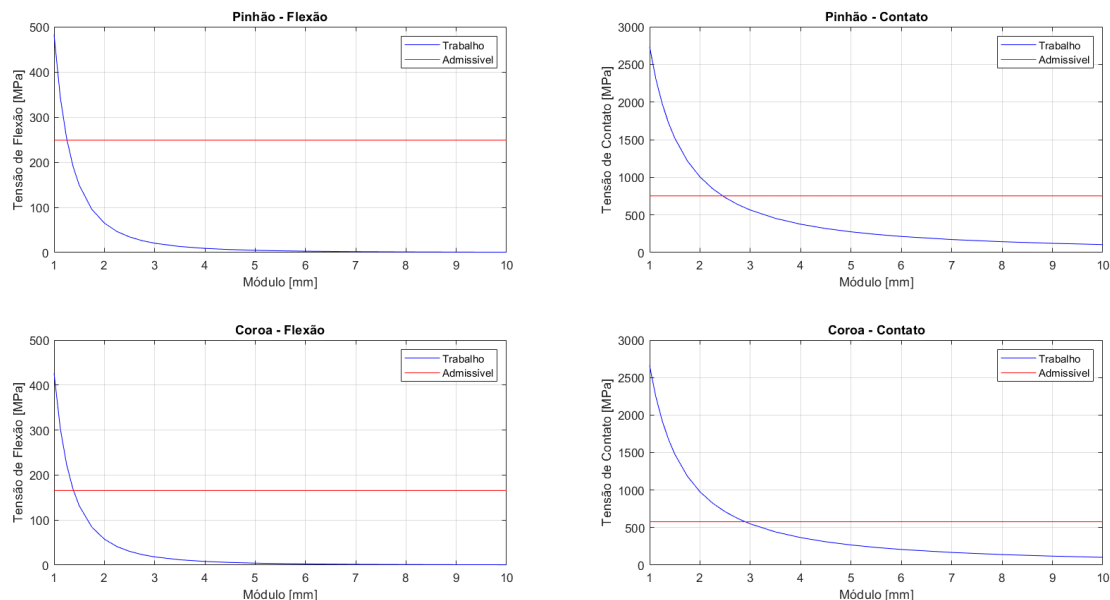


Figura 4. Variação das tensões de flexão e contato em função do módulo.

## 6. CONCLUSÃO

As análises foram realizadas, utilizando o programa computacional desenvolvido neste trabalho, com sucesso e sem a presença de comportamentos inesperados. Os resultados fornecidos pelo modelo podem ser considerados satisfatórios, uma vez que todos eles atenderam às restrições propostas e forneceram parâmetros para o projeto de um par de engrenagens helicoidais adequado para suportar o carregamento aplicado. Além disso, ao variar os valores de módulo, foi possível observar a importância desse parâmetro nas tensões de trabalho, pois fica explícita a sua relação com a resistência das engrenagens. Por fim, o sistema computacional proposto neste trabalho oferece um meio rápido e prático para analisar engrenagens helicoidais, pois já possui em seu algoritmo as principais equações que envolvem o projeto deste tipo de engrenagens.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Budynas, R. G., Nisbett J. K., 2016. *Elementos de Máquinas de Shigley*. McGraw-Hill, Porto Alegre, 10<sup>a</sup> edição.
- Collins, J. A., Busby, H. R. e Staab, G. H., 2019. *Projeto Mecânico de Elementos de Máquinas: Uma perspectiva de prevenção de falha*. LTC, Rio de Janeiro, 2<sup>a</sup> edição.
- Kochenderfer, M. J., Wheeler, T. A., 2019. *Algorithms for Optimization*. Cambridge, 1<sup>a</sup> edição
- Jelaska, D., 2012. *Gears and Gear Drives*. John Wiley & Sons, New Jersey, 1<sup>a</sup> edição.
- Norton, R. L., 2013. *Projeto de Máquinas: uma abordagem integrada*. Bookman, Porto Alegre, 4<sup>a</sup> edição.
- Rao, S. S., 2009, *Engineering Optimization: theory and practice*, John Willey & Sons, New Jersey, 4<sup>th</sup> edição.

## 8. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.