

## APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS DE MÍNIMOS QUADRADOS-LSFEM NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

Sabrina dos Santos Ferreira, [sabrina@fem.unicamp.br](mailto:sabrina@fem.unicamp.br)<sup>1</sup>

Luiz Felipe Mendes de Moura, [felipe@fem.unicamp.br](mailto:felipe@fem.unicamp.br)<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas - FEM/UNICAMP. Rua Mendelejev, 200 - CEP 13083-860 Cidade Universitária "Zeferino Vaz" Barão Geraldo Campinas - SP

**Resumo.** A aplicação do método dos elementos finitos de mínimos quadrados-LSFEM, na resolução da equação de difusão em regimes permanente e transiente foi o objetivo desse estudo. O método Crank-Nicolson foi utilizado para discretizar o tempo, a quadratura de Gauss-Legendre foi utilizada para o cálculo das integrais. Para a solução do sistema algébrico utilizou-se o método dos gradientes conjugados, pois, a matriz é simétrica, esparsa e definida positiva, características resultantes da formulação via LSFEM. Para obtenção dos resultados um código em linguagem C foi implementado e o Matlab foi utilizado para visualização dos resultados. O erro obtido quando compara-se a solução analítica com a solução numérica para o caso em regime permanente foi  $\approx 0,23\%$  e para o caso em regime transiente foi  $\approx 1,0\%$ .

**Palavras chave:** Método dos Elementos Finitos de Mínimos Quadrados-LSFEM, Equação de Difusão, Método Crank-Nicolson, Quadratura de Gauss-Legendre, Método dos Gradientes Conjugados.

**Abstract.** The objective of this study was to apply the least squares finite element method-LSFEM to solve the diffusion equation in a permanent and transient regime. The Crank-Nicolson method was used to discretize time, the Gauss-Legendre square was used to calculate the integrals. For the solution of the algebraic system, the conjugated gradients method was used, since the matrix is symmetrical, sparse and positively defined, characteristics resulting from the formulation via LSFEM. To obtain the results a code in C language was implemented and Matlab was used to visualization the results. The error obtained when comparing the analytical solution with the numerical solution for the case in permanent regime was  $\approx 0,23\%$  and for the case in transient regime it was  $\approx 1,0\%$ .

**Keywords:** Least Square Finite Element Method-LSFEM, Diffusion Equation, Crank-Nicolson Method, Gauss-Legendre Quadrature, Conjugated Gradient Method.

### 1. INTRODUÇÃO

Segundo Bochev e Gunzburger (2006) o método dos elementos finitos de mínimos quadrados (LSFEM) são uma classe atraente de métodos para solução de equações diferenciais parciais (EDP), esse método é baseado na minimização de funcionais convexos que são construídos a partir dos resíduos da equação. Uma das principais vantagens desse método é apresentar uma matriz ser simétrica, esparsa e definida positiva, reduzindo-se o custo de armazenando dos elementos e menor esforço computacional para resolução do sistema linear, sendo eficientemente resolvido utilizando o método dos gradientes conjugados, de acordo com Ferreira (2015).

No trabalho de Camprub et al. (2000) o LSFEM foi utilizado na resolução de problemas de convecção difusão com altos números de Peclet, apresentando bons resultados para o caso com difusão dominante. Em Perreira (2004) usando as formulações de velocidade-pressão-vorticidade e velocidade-pressão-tensão, simulações de escoamentos incompressíveis foram realizadas. No trabalho de Claro; Campos; Moura (2011) foi apresentado a solução numérica da equação de Poisson e Helmholtz via LSFEM e método de Galerkin. Ferreira (2015) apresentou a solução da equação de convecção difusão bidimensional com propriedades constantes e propriedades variáveis com a temperatura.

O objetivo desse estudo foi aplicar o método dos elementos finitos de mínimos quadrados-LSFEM para obtenção da solução da equação de difusão em regimes permanente e transiente.

## 2. EQUAÇÃO DE DIFUSÃO EM REGIME TRANSIENTE

A equação de difusão em regime transiente que é o objeto de estudo nesse trabalho é apresentada na Eq.(1),

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \quad (1)$$

onde  $k$ (W/m.K) representa a condutividade térmica do material.

## 3. MÉTODO DO RESÍDUO PONDERADO

As equações diferenciais parciais(EDP) modelam diferentes fenômenos físicos, devido a dificuldade de obtenção de soluções analíticas, métodos numéricos devem ser utilizados para obtenção das soluções. Segundo Hutton (2003) o método dos resíduos ponderados é um dos métodos utilizados. A ideia central é minimizar o erro obtido ao resolver uma integral sobre o domínio do problema utilizando funções de interpolação que satisfaçam as condições iniciais e de contorno. A solução aproximada,  $\tilde{u}(x, y)$ , é apresentada na Eq.(2),

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_i^n u_i N_i(x, y) \quad (2)$$

onde os coeficientes,  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , são chamados de coeficientes de Fourier e  $N_i(x, y)$  são as funções de interpolação. A solução aproximada,  $\tilde{u}(x, y)$ , não satisfaz a EDP, assim haverá um resíduo gerado,  $R(x, y)$ , apresentado na Eq.(3),

$$R(x, y) = u(x, y) - \tilde{u}(x, y) \quad (3)$$

sendo,  $u(x, y)$ , a solução exata da EDP. Multiplicando-se o resíduo, Eq.(3), por uma função de ponderação,  $\omega_i$ , e integrando o produto ao longo do domínio do problema,  $\Omega$ , igualando a zero obtem-se a Eq.(4),

$$\int_{\Omega} \omega_i R(x, y) d\Omega = 0 \quad (4)$$

A escolha da função de ponderação,  $\omega_i(x)$ , define o tipo do método de resíduo ponderado a ser utilizado. No método dos elementos finitos de mínimos quadrados-LSFEM a função de ponderação,  $\omega_i$ , será igual a primeira variação do resíduo,  $\delta R(u)$ .

## 4. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS DE MÍNIMOS QUADRADOS-LSFEM

Adotando-se o método de Crank-Nicolson para discretização temporal, o resíduo,  $R(x, y)$ , é apresentado na Eq.(5),

$$R(x, y) = \left\{ \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} N_i - 0.5k(T^s) \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} - 0.5k(T^s) \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right\} + \left\{ -\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s N_i - 0.5k(T^{s-1}) \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} - 0.5k(T^{s-1}) \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right\} \quad (5)$$

onde  $Nnos$  é o número de nós do elemento da discretização espacial. A primeira variação do resíduo,  $\delta R(x, y)$ , é apresentada na Eq. (6),

$$\delta R(x, y) = \frac{\partial R}{\partial T_i} \delta T_i = \left( \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} N_i - 0.5k \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} - 0.5k \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right) \delta T_i \quad (6)$$

Aplicando o método dos elementos finitos de mínimos quadrados-LSFEM tem-se a Eq.(7),

$$\int_{\Omega} R(x, y) \delta R d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} N_i - 0.5k \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} - 0.5k \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right) + \left( -\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s N_i - 0.5k \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} - 0.5k \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right) \right\} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} N_i - 0.5k \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} - 0.5k \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right\} \delta T_i d\Omega = 0. \quad (7)$$

Reorganizando a Eq.(7) obtém-se o sistema linear apresentado na Eq.(8), onde,  $A_{i,j}$ , é a matriz global e,  $b_i$  é o vetor do lado direito.

$$[A]\{T^{s+1}\} = [b]\{T^s\} \quad (8)$$

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\Delta t} N_i - 0.5k \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} - 0.5k \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right) \left( \frac{1}{\Delta t} N_j - 0.5k \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} - 0.5k \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \right) d\Omega \quad (9)$$

$$b_i = - \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{\Delta t} N_i - 0.5k \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + 0.5k \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right) \left( \frac{1}{\Delta t} N_j - 0.5k \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} - 0.5k \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \right) d\Omega \quad (10)$$

## 5. METODOLOGIA

Para a resolução da equação de convecção em regimes transiente e permanente via LSFEM, foi implementado um código em linguagem C. Para a discretização espacial foi utilizado elemento com 8 nós, o método de Crank-Nicolson foi utilizado para a discretização temporal, o método de Gauss-Legendre foi utilizado no cálculo das integrais. A resolução do sistema linear deu-se via método dos gradientes conjugados, pois a matriz resultante é simétrica, esparsa e definida positiva, resultado da aplicação do LSFEM. Para visualização dos resultados utilizou-se a função `contourf()` do Matlab.

## 6. RESULTADOS

Nesse estudo a equação de difusão em regime permanente e transiente foi resolvida. Os resultados obtidos a partir do código em linguagem C desenvolvido, foram comparados com a solução analítica obtida via método da separação das variáveis com o objetivo de validação do código implementado. Os resultados apresentados nas Fig. 2, Fig. 3, Fig. 6 e Fig. 7 foram obtidas utilizando a função `contourf()` do Matlab.

### 6.1 PROBLEMA DE DIFUSÃO EM REGIME PERMANENTE

A equação diferencial para o problema de difusão permanente é apresentada na Eq. (11), a condutividade térmica do material é igual a  $k = 1 \text{ W/m.K}$ . O domínio do problema em estudo é apresentado na Fig. 1.

$$k \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0. \quad (11)$$

As condições de contorno do tipo Dirichlet são, Eq.(12).

$$\begin{aligned} T(0,y) &= 0^\circ\text{C} \\ T(x,0) &= 1^\circ\text{C} \\ T(1,y) &= 1^\circ\text{C} \\ T(x,1) &= 1^\circ\text{C} \quad \text{com} \quad 0 \leq (x,y) \leq 1 \quad . \end{aligned} \quad (12)$$

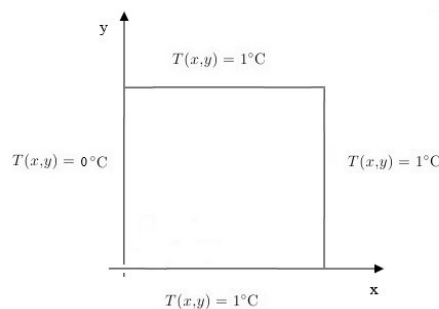


Figura 1. Domínio de solução do problema de difusão em regime permanente - Eq. (11 - 12).

A solução do analítica problema Eq. (11 - 12), foi obtida via método da separação de variáveis, é apresentado na Eq. (13),

$$\begin{aligned}
 T(x, y) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2 + 2 \cos(n\pi))(e^{n\pi y} - e^{-n\pi y}) \sin(n\pi x)}{(e^{n\pi} - e^{-n\pi})(\cos(n\pi) \sin(n\pi) - n\pi)} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2 + 2 \cos(n\pi))(e^{n\pi y} - e^{2n\pi} e^{-n\pi y}) \sin(n\pi x)}{(1 - e^{2n\pi})(\cos(n\pi) \sin(n\pi) - n\pi)} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2 + 2 \cos(n\pi))(e^{n\pi x} - e^{-n\pi x}) \sin(n\pi y)}{(e^{n\pi} - e^{-n\pi})(\cos(n\pi) \sin(n\pi) - n\pi)}. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Para a obtenção da solução numérica o domínio foi discretizado utilizando-se 1600 elementos quadriláteros com 8 nós. A Fig. 2 apresenta a solução analítica, Eq. (13) e a Fig. 3 apresenta a solução numérica do problema proposto, Eq. (11 - 12).

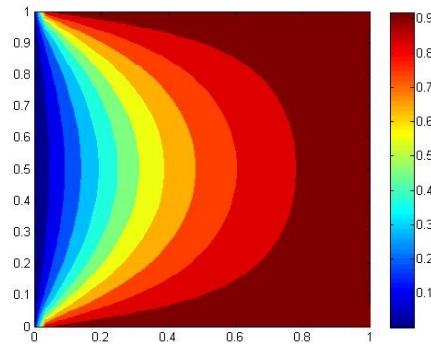


Figura 2. Solução analítica para o problema de difusão em regime permanente - Eq. (11 - 12)

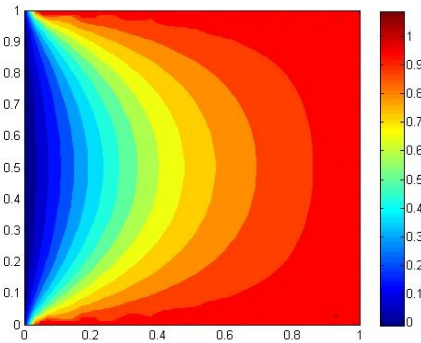


Figura 3. Solução numérica para o problema de difusão em regime permanente via LSFEM - Eq. (11 - 12)

Os métodos numéricos são utilizados na resolução de diversos problemas que não apresentam soluções analíticas ou apresentam soluções difíceis de serem obtidas analiticamente. A escolha do método numérico adequado deve levar em conta a precisão dos cálculos com que se pretende obter a solução numérica desejada. A diferença entre a solução numérica,  $sol_n$  e o valor exato, solução analítica,  $sol_a$ , denomina-se erro absoluto,  $\epsilon$ , de acordo com a Eq.(14),

$$\epsilon = |sol_a - sol_n| \tag{14}$$

Para a validação da solução numérica obtida nesse trabalho, o erro absoluto,  $\epsilon$ , foi calculado comparando-se uma linha da solução numérica e uma linha da solução analítica, do problema Eq. (11 - 12). Os valores são apresentados na Tab. 1 e os resultados são apresentados na Fig. 4.

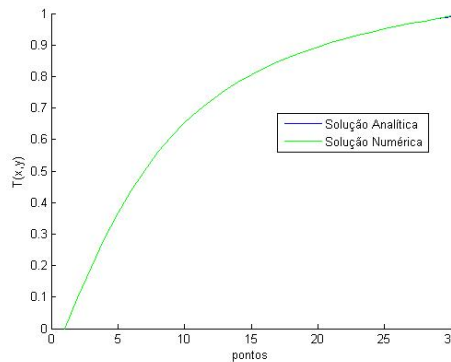


Figura 4. Comparação entre as soluções numéricas e analítica.

O erro absoluto,  $\epsilon$ , que representa a diferença entre a solução analítica,  $sol_a$  e a solução numérica,  $sol_n$ , deve-se aos erros de arredondamento e truncamento inerentes ao método numérico.

Tabela 1. Erro absoluto,  $\epsilon$ , devido a diferença entre a solução analítica, ( $sol_a$ ) e a solução numérica ( $sol_n$ ) comparando-se uma linha.

pontos	$sol_a$	$sol_n$	$\epsilon= sol_a - sol_n $	pontos	$sol_a$	$sol_n$	$\epsilon= sol_a - sol_n $
1	0.000000	0.000000	0.000000	17	0.846497	0.846496	0.000001
2	0.099342	0.099341	0.000001	18	0.863919	0.863918	0.000001
3	0.195115	0.195114	0.000001	19	0.879707	0.879706	0.000001
4	0.284501	0.284500	0.000001	20	0.894071	0.894070	0.000001
5	0.365827	0.365826	0.000001	21	0.907197	0.907196	0.000001
6	0.438514	0.438513	0.000001	22	0.919248	0.919247	0.000001
7	0.502781	0.502780	0.000001	23	0.930372	0.9303717	0.0000003
8	0.559298	0.559297	0.000001	24	0.940702	0.940701	0.000001
9	0.608923	0.608922	0.000001	25	0.950360	0.950359	0.000001
10	0.652536	0.652535	0.000001	26	0.959457	0.959456	0.000001
11	0.690956	0.690955	0.000001	27	0.968098	0.968097	0.000001
12	0.724908	0.724907	0.000001	28	0.976381	0.976372	0.000009
13	0.755017	0.755016	0.000001	29	0.984400	0.984252	0.000148
14	0.781812	0.781811	0.000001	30	0.992215	0.989901	0.002314
15	0.805746	0.805745	0.000001	31	1.000000	0.999999	0.000001
16	0.827199	0.827198	0.000001				

Observando a Fig.8 e a Tab. 1 podemos observar que a solução numérica apresenta uma boa aproximação para a solução analítica, a maior diferença é igual a 0.002314  $\approx$  0.23%.

## 6.2 PROBLEMA DE DIFUSÃO EM REGIME TRANSIENTE

A equação diferencial do problema de difusão transiente é apresentada na Eq. (15), a condutividade térmica do material é igual a  $k = 1W/m.K$  e o passo de tempo,  $\Delta t$ , é igual a 0,025 s. O domínio do problema em estudo é apresentado na Fig. 5.

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} + k \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} = 0. \quad (15)$$

As condições de contorno do tipo Dirichlet e as condições iniciais são apresentadas na Eq.(16),

$$\begin{aligned} T(0, y, t) &= 0^\circ\text{C} \\ T(x, 0, t) &= 0^\circ\text{C} \\ T(1, y, t) &= 0^\circ\text{C} \\ T(x, 1, t) &= 0^\circ\text{C} \\ T(x, y, 0) &= 100^\circ\text{C} \quad \text{com} \quad 0 \leq (x, y) \leq 1 \quad . \end{aligned} \quad (16)$$

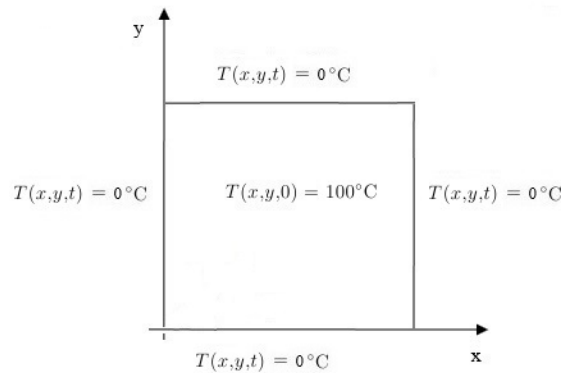


Figura 5. Domínio de solução do problema de difusão em regime transiente - Eq. (15 - 16).

A solução do analítica do problema Eq.(15 - 16), foi obtida via método da separação de variáveis, sendo apresentada na Eq. (17),

$$T(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{400(1 - \cos(m\pi) - \cos(n\pi))}{mn\pi^2} \sin(m) \sin(n\pi y) e^{-k\gamma_{mn}^2 t} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{400(\cos(n\pi) \cos(m\pi))}{mn\pi^2} \sin(m) \sin(n\pi y) e^{-k\gamma_{mn}^2 t} \quad \text{com} \quad \gamma_{mn}^2 = \pi^2(m^2 + n^2) \quad (17)$$

Para a obtenção da solução numérica,  $sol_n$ , o domínio foi discretizado utilizando-se 1600 elementos quadriláteros com 8 nós. Para a discretização temporal utilizou-se um passo de tempo  $\Delta t = 0.025s$ . A Fig. 6 apresenta a solução analítica, Eq. (17), e a Fig. 7 apresenta a solução numérica do problema proposto nas Eq. (15 - 16).

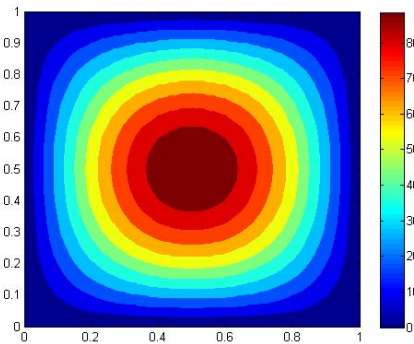


Figura 6. Solução analítica para o problema de difusão transiente - Eq. (15 - 16).

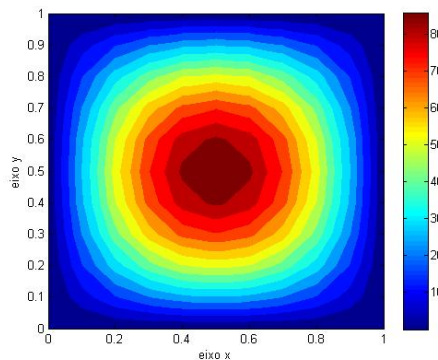


Figura 7. Solução numérica para o problema de difusão transiente - Eq. (15 - 16).

Para a validação da solução numérica,  $sol_n$  comparou-se uma linha da solução numérica,  $sol_n$  e uma linha da solução analítica,  $sol_a$  do problema Eq. (15 - 16) como pode-se observar na Fig. 8. Esses valores são apresentados na Tab. 2

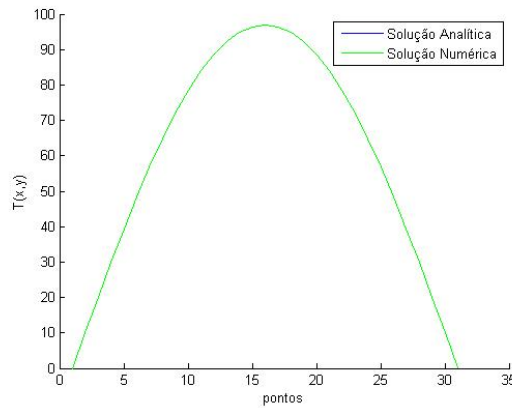


Figura 8. Comparação entre as Soluções Numéricas e Analítica

Tabela 2. Diferença entre a solução analítica, ( $sol_a$ ) e a solução numérica ( $sol_n$ ) comparando-se uma linha.

pontos	$sol_a$	$sol_n$	$ sol_a - sol_n $	pontos	$sol_a$	$sol_n$	$ sol_a - sol_n $
1	0.00000	0.00000	0.0000	17	96.3696	96.3699	0.0003
2	10.1289	10.1299	0.0010	18	94.7830	94.793	0.0102
3	20.1467	20.1477	0.0010	19	92.1578	92.1583	0.0005
4	29.9439	29.9440	0.0001	20	88.5230	88.5280	0.0050
5	39.4130	39.4133	0.0003	21	83.9183	83.9191	0.0008
6	48.4502	48.4542	0.0040	22	78.3941	78.3946	0.0005
7	56.9566	56.958	0.0014	23	72.0111	72.0141	0.0030
8	64.8390	64.8398	0.0008	24	64.8391	64.8398	0.0007
9	72.0111	72.0141	0.0030	25	56.9567	56.958	0.0013
10	78.3941	78.3946	0.0005	26	48.4503	48.4542	0.0039
11	83.9182	83.9191	0.0009	27	39.4130	39.4131	0.0001
12	88.5230	88.5280	0.0050	28	29.9439	29.9440	0.0001
13	92.1578	92.1583	0.0005	29	20.1468	20.1477	0.0009
14	94.7829	94.7932	0.0103	30	10.1289	10.1299	0.0010
15	96.3696	96.3699	0.0003	31	0.0001	0.00012	0.00002
16	96.9005	96.9015	0.0010				

Observando a Fig.8 e a Tab. 2 podemos observar que a solução numérica apresenta uma boa aproximação para a solução analítica, a maior diferença é igual a  $0.0103 \approx 1\%$ .

## 7. CONCLUSÕES

- O erro absoluto,  $\epsilon$ , obtido quando compara-se a solução analítica com a solução numérica para o caso em regime permanente foi  $\approx 0.23\%$
- O erro absoluto,  $\epsilon$ , obtido quando compara-se a solução analítica com a solução numérica para o caso em regime transiente foi  $\approx 1\%$ .
- De acordo com o exposto no trabalho os resultados obtidos apresenta bons resultados em ambos os casos analisados a partir do código em linguagem C desenvolvido.

## 8. AGRADECIMENTOS

Agradeço a CAPES(Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

## 9. REFERÊNCIAS

Bochev, P. e Gunzburger, M., 2006. Least-Squares Finite Element Methods. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, p. 1137-1162, vol. 166.

Camprub et al. 2000. Galerkin, least square and galerkin least square numerical approaches for convective diffusive transport problems. European congress on computational in applied science and engineering, p. 11–14.

Claro, Romão Estaner; Campos, Marcos Donizete; Moura, Luiz Felipe Mendes. 2011. Application of the Galerkin and Least-Squares Finite Element Methods in the solution of 3D Poisson and Helmholtz equations. Computers and Mathematics with Applications, p. 4288-4299, N. 62.

Ferreira, Sabrina dos Santos. 2015. Estudo do Método dos Elementos Finitos de Mínimos Quadrados - LSFEM para Resolução da Equação de Convecção - Difusão Bidimensional. 2020. 95f. Dissertação (Mestrado)- Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Hutton, D. V. Fundamentals of Finite Element Analysis, McGraw-Hill Science, New Jersey, 1st Edition, 2003.

Perreira, Vanessa D. 2005. Simulação numérica de escoamentos de fluidos pelo método de elementos finitos de mínimos quadrados. Universidade Estadual Paulista.2005.

## **10. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES**

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.