



## PROPOSTA DE MODELAGEM MATEMÁTICA DA VARIAÇÃO DE MASSA ESPECÍFICA DE UM CONJUNTO CILINDRO-PISTÃO

Tássia Carolina Forasteiro Pinto, [tcfp.eng16@uea.edu.br](mailto:tcfp.eng16@uea.edu.br)<sup>1</sup>  
Diego Bandeira de Melo Akel Thomaz, [dbdmat.eng16@uea.edu.br](mailto:dbdmat.eng16@uea.edu.br)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade do Estado do Amazonas – Escola Superior de Tecnologia. Avenida Darcy Vargas, 1200 – Parque Dez de Novembro, Manaus – AM, 69050-020

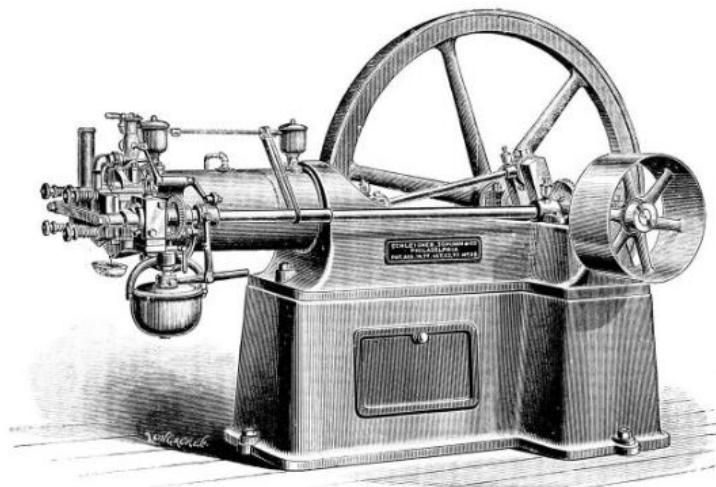
**Resumo.** Desde o século dezanove os motores de combustão interna tiveram seu desenvolvimento ligado a modelos termodinâmicos responsáveis por descrever as variáveis importantes no estudo do seu funcionamento. Estes modelos foram importantes na construção do primeiro motor. No entanto, até a década de 1960, o empirismo dominou o desenvolvimento tecnológico. A partir desta década, a disponibilidade de meios computacionais tornou as análises cada vez mais sofisticadas. Ao olhar para o atual nível de pesquisa de motores de combustão interna, é notado que muitos trabalhos têm como objetivo resolver algum pequeno problema da modelagem matemática que será aplicado de forma computacional na análise desses motores. Saber como se comporta a variação de massa específica em função de medidas geométricas dentro de um cilindro do motor é de suma importância para a análise de eficiência de motores, sendo assim, esse trabalho demonstra a modelagem e um exemplo de aplicação no motor International HR 1.5, comumente utilizado em carros à diesel.

**Palavras chave:** termodinâmica, fluidos, motores, massa específica.

### 1. INTRODUÇÃO

Em 1866, quando Nikolaus August Otto criou a sua máquina de combustão interna, como mostrada na Fig. 1, a humanidade presenciou a maior mudança na sua relação com a utilização do trabalho mecânico. Essa máquina proporcionou o início da utilização de energia térmica em forma mecânica, com a qual podem ser realizadas praticamente qualquer tarefa. Com isso, a humanidade passou a dar mais atenção para o estudo do ramo da física que investiga as leis e processos que regem as relações entre calor, trabalho e outras formas de transformações de energia, chamado de termodinâmica. Sendo assim, o desenvolvimento técnico de motores auxiliou no aperfeiçoamento da termodinâmica que em seguida forneceu ferramentas para o desenvolvimento de melhores motores. (Mcelroy, 2010)

Figura 1. Primeiro motor a combustão interna, criado por Nikolaus August Otto (Youmans, 1881)



Apesar de já ser conhecida e estudada desde tempos antigos, a termodinâmica só nasceu formalmente a partir do início do século XIX, quando percebeu-se a capacidade de produção de trabalho mecânico a partir do calor. Hoje em dia, o estudo termodinâmico se torna cada vez mais essencial em vários campos da ciência. Energia é a moeda de troca mais

importante e as nossas principais formas de utilizá-las, como combustíveis fósseis, estão se esvaindo, sendo assim o estudo e melhoria do seu uso são indispensáveis na sociedade moderna. (Belan et al., 2016)

Até a metade do século passado, os cálculos de engenharia nas áreas de mecânica dos fluidos e de termodinâmica eram majoritariamente feitos de forma analítica, sem o auxílio computacional. Com as necessidades de rápidas inovações no setor aeroespacial, novas técnicas de desenvolvimento de aeronaves precisam ser desenvolvidas para se obter uma vantagem competitiva. Antes da década de 1960, esse desenvolvimento era feito praticamente através da experiência, somando teoria e experimentação, o que levava a custos muito altos e a várias tentativas falhas. Para baratear esse processo, a indústria aeroespacial passou a desenvolver mais o setor computacional, utilizando métodos numéricos para resolver as equações matemáticas que regem o comportamento físico de fluidos, para assim, prever como uma aeronave se comportaria quando em funcionamento no mundo real. Assim, nasceu o ramo de Fluidodinâmica Computacional (CFD – Computational Fluid Dynamics) (Anderson, 1998).

Após esse desenvolvimento inicial, o ramo de CFD se espalhou para outras indústrias, entre elas se inclui a indústria de desenvolvimento de motores de combustão interna (MCI). Desde o século dezenove os MCI tiveram seu desenvolvimento ligado a modelos termodinâmicos responsáveis por descrever as variáveis importantes no estudo do seu funcionamento. Estes modelos foram importantes na construção do primeiro motor. No entanto, até a década de 1960, o empirismo dominou o desenvolvimento tecnológico destes motores (Barros, 2003). A partir desta década, a disponibilidade de meios computacionais mais baratos e poderosos, advindos do setor aeroespacial, vem tornando a simulação uma ferramenta importante na pesquisa de novos motores, permitindo uma significativa melhora de desempenho, como as modelagens dinâmicas em Pereira (2003) e Raggi (2005). Hoje em dia não é possível conceber um novo desenvolvimento sem o uso de ferramentas de modelagem. A capacidade de previsão dos atuais modelos é suficiente para eliminar configurações muito ineficientes, reduzindo assim os custos da fase de experimentação em protótipos. Contudo, ainda não existe um procedimento de modelagem generalizado que permita a análise de todas as características de funcionamento de um motor de combustão interna.

Com o aumento contínuo do preço de combustíveis e com tratados internacionais de redução de emissões poluentes, o estudo de métodos de otimização para MCI tem se tornado uma área cada vez mais importante e visada (Reitz & Duraisamy, 2015), muitos trabalhos como Costa (2007), Brambila (2006) e Silva (2004) têm como o único objetivo realizar análises energéticas e exergeticas de MCI, a partir das quais é possível propor melhorias. Para modificar e melhorar o funcionamento de um motor, é necessário compreender e expressar matematicamente as relações entre as propriedades da mistura oxigênio e combustível existente no processo de combustão, dentre as quais temos temperatura, pressão e massa específica. Precisamos, também, relacionar essas propriedades dos fluidos internos ao motor com os seus parâmetros externos, como a rotação do virabrequim e medidas geométricas do conjunto cilindro-pistão. A partir dessas modelagens, podemos tomar decisões sobre o que e como deve-se modificar para maximizar a performance do conjunto.

Ao olhar para o atual nível de pesquisa de MCI, é notado que muitos trabalhos têm como objetivo resolver algum pequeno problema da modelagem matemática desses motores, para que esta seja implementada em modelos computacionais e sirva como mais uma abordagem para o desenvolvimento de novas técnicas de otimização. Novos modelos são úteis por apresentar diferentes níveis de complexidade, gasto computacional e margens de erro. Sendo assim, ao realizar uma análise desse tipo, é desejado pelo projetista possuir uma grande quantidade de modelos diferentes, para realizar a comparação de resultados entre os mesmos e decidir quais os melhores para a aplicação em questão. A partir desses pequenos desenvolvimentos de novas ferramentas os modelos de descrição de MCI vão ficando cada vez mais sofisticados e realistas.

O objetivo deste trabalho é demonstrar o processo de desenvolvimento de mais uma dessas ferramentas, a modelagem da variação de massa específica dentro do conjunto cilindro-pistão em relação a variação de ângulo do virabrequim. Esse modelo é útil para análises termodinâmicas realizadas para um novo motor, sendo possível decidir combinações melhores de combustível e oxigênio que proporcionem a queima mais eficiente, assim como a razão de compressão (razão entre o volume máximo e mínimo dentro do cilindro) ideal. Conforme Rech (2002), o aumento da massa específica implica no aumento da massa a ser oxidada, causando uma potência final mais alta sendo fornecida pelo motor.

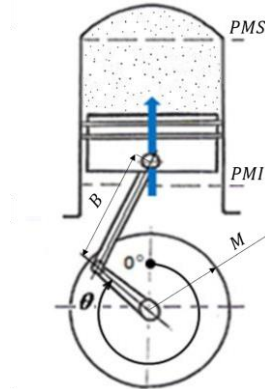
## 2. METODOLOGIA

Inicialmente é preciso determinar as características geométricas do conjunto cilindro-pistão. Como o objetivo deste trabalho é fornecer mais uma ferramenta a ser utilizada, todo o processo será feito de forma algébrica, sem a utilização de valores numéricos.

A forma algébrica para análise de modelos foi acrescentada para tornar a classificação mais abrangente. Todos os modelos visam fazer previsões de eficiência, desempenho e emissões do motor a pistão (Stone, 1995). A forma algébrica utiliza um sistema de equações derivadas de relações da termodinâmica clássica, associando as eficiências que corrigem os resultados do ciclo ideal para um ciclo real. Os sistemas de controle em tempo real utilizam este tipo de modelo devido ao seu baixo custo computacional e a facilidade de se introduzir correções empíricas para um motor específico (Barros, 2013).

Para o início da modelagem algébrica os pontos superior e inferior do curso do pistão dentro do cilindro foram demarcados como, respectivamente, Ponto Morto Superior (PMS) e Ponto Morto Inferior (PMI), como mostrados na Fig.2.

Figura 2. Principais parâmetros geométricos de um cilindro pistão



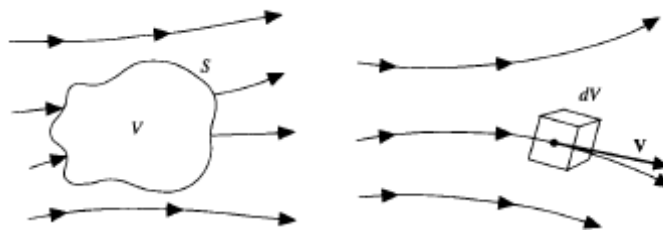
Em seguida é necessário definir o modelo fluidodinâmico e as equações que serão utilizadas. De acordo com (Anderson, 1998) todo o campo de estudo de mecânica dos fluidos é baseado em três fundamentos:

- Massa é conservada: Conhecido como a equação de Continuidade;
- Quantidade de movimento é conservada: Conhecida como a Segunda Lei de Newton, aplicada em fluidos;
- Energia é conservada: Conhecido como a primeira lei da termodinâmica, aplicada em fluidos.

Para trabalhar com essas leis, estabelecemos modelos de fluidos nos quais aplicamos esses fundamentos, tendo como produto equações diferentes para cada modelo. Intrinsecamente, as equações dizem as mesmas coisas mesmo estando escritas em formas diferentes. Podemos dividir essas equações em dois grupos e depois subdividi-las nesses grupos, da seguinte forma:

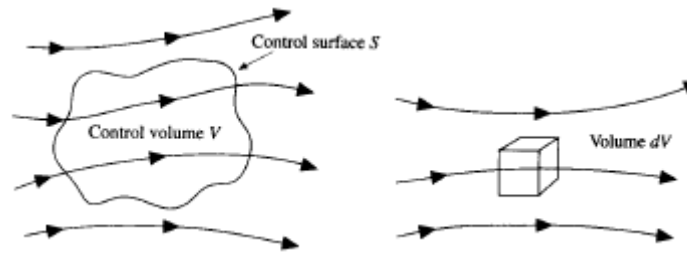
1. Abordagem de Lagrange: Nesse grupo, descrevemos o fluido através de um conjunto de partículas ao longo das suas trajetórias, como demonstrado na Fig. 3, e tentamos descrever seus comportamentos em equações. Essa abordagem também é chamada de não-conservativa. Dentro desse grupo podemos dividir a análise em:
  - a. Um volume de controle finitesimal se movendo com o fluxo.
  - b. Um elemento de fluido infinitesimal se movendo com o fluxo.

Figura 3. Modelos de Lagrange (Anderson, 1998)



2. Abordagem de Euler: Nesse grupo, fixamos no espaço o que queremos estudar e analisamos o que passa por aquela região que estamos olhando, como demonstrado na Fig. 4. Com isso, escrevemos as equações diferenciais e integrais. Dentro desse grupo podemos pensar em dividir também em:
  - a. Um volume de controle finitesimal fixo no espaço:
  - b. Um elemento de fluido infinitesimal fixo no espaço.

Figura 4. Modelos de Euler (Anderson, 1998)



A partir desses modelos podemos desenvolver equações que explicam como se comporta a variação de propriedades de estado nesse fluxo. As formas mais completas das equações de conservação de momento linear foram desenvolvidas simultaneamente por Claude-Louis Navier e George Gabriel Stokes no século XIX. Essas equações foram posteriormente desenvolvidas para a conservação de massa e de energia, resultando no temos hoje como as famosas equações de Navier-Stokes. Matematicamente, essas equações ainda não são totalmente compreendidas, mas já possuem muitas aplicações práticas em física e engenharia. Para esse trabalho, só se utilizou a equação de Navier-Stokes na forma de conservação de massa ou continuidade para um elemento infinitesimal fixo do fluido representada na Eq. 1.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \tag{1}$$

Onde:

$\rho$  = massa específica do fluido

$\nabla$  = operador gradiente

$V$  = vetor velocidade

Que, se expandirmos, obtemos para as coordenadas em  $x, y$  e  $z$  e suas respectivas velocidades  $u, v, w$  desenvolvidos na Eq. 2.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

A Eq. 2 é a equação de balanço de massa em coordenadas cartesianas. Através dessa equação podemos descrever a variação convectiva ou espacial do vetor velocidade e da massa específica assim como a variação temporal da massa específica. Como estamos trabalhando com o espaço dentro do cilindro, transformamos a equação da continuidade para coordenadas cilíndricas como mostrado na Eq. 3 e representado geometricamente na Fig. 5. Essa equação permanece na forma diferencial por estar representando um volume de controle infinitesimal fixo.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

Onde:

$r$  = Coordenada radial

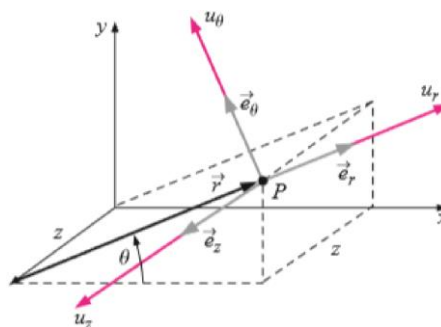
$\theta$  = Coordenada angular

$u_r$  = Velocidade em  $r$

$u_\theta$  = Velocidade em  $\theta$

$u_z$  = Velocidade em  $z$

Figura 5. Coordenadas Cilíndricas



Levando em conta o mecanismo da manivela, não temos velocidades radiais e nem no eixo z (perpendicular as outras duas coordenadas), sendo assim, podemos cancelar essas coordenadas e obter a Eq. 4.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_{\theta})}{\partial \theta} = 0 \quad (4)$$

Com a derivada em uma só dimensão, não precisamos mais usar a notação de derivada parcial e pode-se trabalhar efetivamente com a Eq. 5.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{d(\rho u_{\theta})}{d\theta} \quad (5)$$

Derivando pela regra da cadeia obtemos a Eq. 6.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\left(\rho \frac{du_{\theta}}{d\theta} + u_{\theta} \frac{d\rho}{d\theta}\right) \quad (6)$$

Para determinar a relação de  $\rho$  com  $\theta$  dividimos ambos os lados por  $u_{\theta}$ , e obtemos a Eq.7.

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\left(\frac{1}{u_{\theta}} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{u_{\theta}} \frac{du_{\theta}}{d\theta}\right) \quad (7)$$

Para o termo  $dt$ , usamos a relação de velocidade angular  $\omega$  demonstrada na Eq. 8.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (8)$$

Substituindo a Eq. 8 na Eq. 7 obtemos a Eq. 9.

$$\frac{d\rho}{d\theta} \left(1 + \frac{\omega}{u_{\theta}}\right) = -\frac{\rho}{u_{\theta}} \frac{du_{\theta}}{d\theta} \quad (9)$$

Integrando ambos os lados da Eq. 9 nos seus intervalos determinados, como mostrado na Eq.10.

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\int_{u_{\theta_0}}^{u_{\theta}} \frac{du_{\theta}}{(u_{\theta} + \omega)} \quad (10)$$

Obtem-se a Eq. 11.

$$\ln \rho = -\ln (u_{\theta} + \omega) \quad (11)$$

E em seguida a Eq. 12.

$$\rho = \frac{1}{u_{\theta} + \omega} \quad (12)$$

Através de uma análise cinemática do conjunto, temos que a Eq. 13 descreve o curso do pistão.

$$C_{\theta} = M \left[ (1 - \cos \theta) + \frac{k}{4} (1 - \cos 2\theta) \right] \quad (13)$$

Onde:

$M$  = Raio do virabrequim

$B$  = Comprimento da Biela

Derivando a Eq 13 obtemos a velocidade do pistão, como demonstrado na Eq 14. (Tomanik, 2000):

$$u_{\theta} = \omega M \left( \sin \theta + \frac{1}{2} k \sin 2\theta \right) \quad (14)$$

Também temos uma relação de velocidade angular com a frequência de rotação de motor, através da Eq. 15.

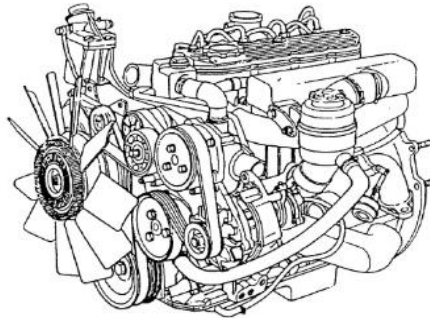
$$\omega = 2\pi f \quad (15)$$

Juntando a Eq.12, Eq. 14 e Eq. 15 obtemos a Eq.16 modelada para a análise.

$$\rho = \frac{1}{\omega M \left( \sin\theta + \frac{1}{2}k \sin 2\theta \right) + 2\pi f} \quad (16)$$

O motor utilizado nas análises foi o *International HS 2.5* como mostrado na Fig. 6 por ser utilizado em vários veículos, como: *Mercedes Sprinter, Land Rover Defender, GM S-10, Ford F-1000, Ford Ranger*.

Figura 6. Motor *International HS 2.5* (MWM, 2011)



Os dados desse motor retirados do seu catálogo técnico estão representados abaixo na Tab. 1.

Tabela 1. Dados do motor *International HS 2.5* (MWM, 2011)

|                                      |                               |
|--------------------------------------|-------------------------------|
| Número e disposição dos cilindros    | 4 em linha                    |
| Diâmetro nominal dos cilindros       | 90,74 mm                      |
| Curso do êmbolo                      | 97 mm                         |
| Ciclo                                | Diesel, 4 tempos              |
| Relação de compressão                | 19,5:1                        |
| Cilindrada total                     | 2,5 litros                    |
| Sistema de combustão                 | Injeção direta                |
| Sentido de rotação (visto de frente) | Horário                       |
| Ordem de injeção                     | 1 - 3 - 4 - 2                 |
| Temperatura de operação              | 86 - 102°C                    |
| Rotação máxima livre                 | 4640 rpm                      |
| Rotação de marcha-lenta              | 850 ± 20 rpm                  |
| Potência (NBR 5484)                  | 115 cv (85 kw) a 3800 rpm     |
| Torque (NBR 5484)                    | 29,0 mkgf (284 Nm) a 1600 rpm |
| Massa                                | 205 kg                        |
| Distância entre casquilho e bucha    | 175,387mm                     |

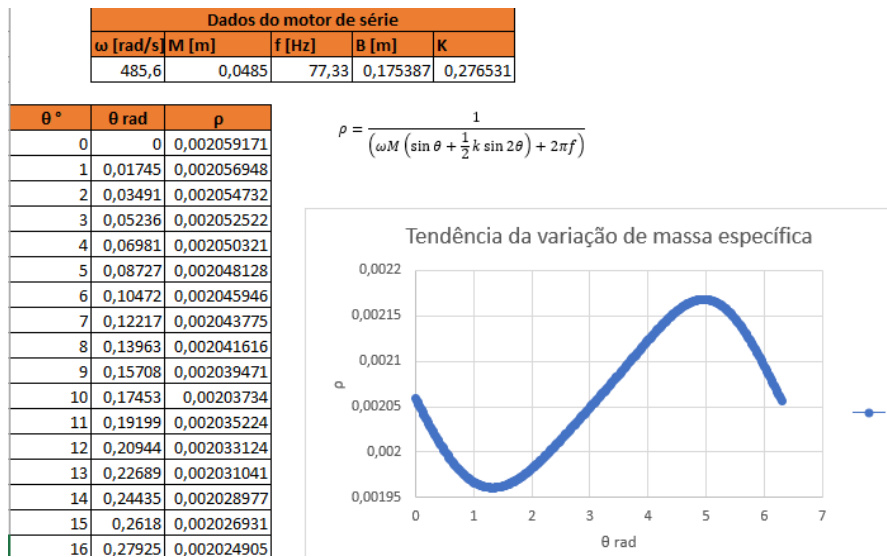
A partir desses dados é possível extrair os tamanhos M e B da Fig. 2. O valor de M é a representado pela metade do tamanho do curso do êmbolo na Tab. 1. A rotação utilizada na análise foi a máxima, de 4640 rpm, correspondente a 77,33 hertz no SI. Com esses valores obtemos a velocidade angular através da Eq.15.

Portanto temos todos os valores necessários para plotar a Eq. 16 para este motor.

### 3. RESULTADOS

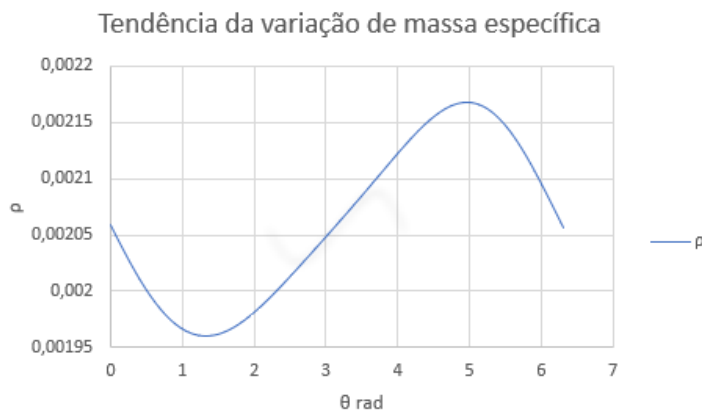
A plotagem do gráfico foi feito através do *Excel* como mostrado na Fig. 7, de forma que pudesse ser facilmente modificável para ser aplicado em outros motores de série.

Figura 7. Planilha desenvolvida no Excel para inserção de dados dos motores de série



A aplicação da equação (23) no motor citado resulta nos valores apresentados na Fig. 8.

Figura 8. Gráfico de tendência da variação da massa específica para o motor International HS 2.5



### 4. CONCLUSÃO

Os resultados obtidos para cada massa específica é de extrema importância para o projetista de motores, pois essa variação toma em cada ponto específico uma atuação direta um ponto da curva pressão vs. volume desenvolvida pelo gás. Dessa forma podemos aproximar o comportamento dinâmico da máquina real.

Outra utilidade para os dados obtidos é aproximar o valor da eficiência volumétrica do motor. São vários os fatores que influenciam a eficiência volumétrica, dentre eles a velocidade do pistão, as pressões de admissão e exaustão, a taxa de compressão do motor, a transferência de calor, a geometria do sistema de admissão e a exaustão, e outras variáveis de operação do motor (Heywood, 1988). Com isso, para cada ponto da curva determinado, pode-se plotar a eficiência volumétrica durante todo o curso do cilindro-pistão, não somente com dados de entrada.

Esse trabalho resultou em mais um parâmetro a ser estudado em análises de motores a combustão interna. Todo o processo de obtenção dos dados foi demonstrado para o motor em questão, esse processo pode ser repetido para qualquer motor de combustão interna.

## 5. REFERÊNCIAS

- Anderson, J. D., 1998. Computational Fluid Dynamics: The basics with applications. 1.ed. McGraw Hill, New York
- Barros, J., 2016. Estudo de Motores de Combustão Interna Aplicando Análise Orientada a Objetos. UFMG, 73f. Dissertação (Pós Graduação – Curso de Mecânica)
- Brambila, J.A., 2006. Estudo experimental e simulação termodinâmica de desempenho em um motor de combustão interna operando com óleo diesel e etanol. USP, 144f. Dissertação (Mestrado – Engenharia Mecânica)
- Costa, Y., 2007. Análise energética e exérgica de um motor de combustão interna operando com mistura de diesel e gás natural. UFCG, 209 f. Dissertação (Doutorado – Engenharia de Processos)
- Mcelroy, M. B. Energy: perspectives, problems & prospects. [s.l.]: [s.n.], 2010. 422 p. ISBN: 9780195386110
- MWM I.M., 2011. Manual de Oficina. 29 Jun. 2019 <<http://polipecas.com/wp-content/uploads/2016/12/manual-ofic.hs-2.5.pdf/>>.
- Pereira V., 2003. Estudo e modelagem dinamica de gerador de indução acionado por maquina de combustão interna com controle de tensão e de frecuencia por meio de inversor PWM. UFMGS, 81f. Tese de Doutorado (Doutorado – Engenharia Elétrica).
- Raggi, M., 2005. Modelagem da cinemática química de formação de Nox e CO em motores com ignição por centelha. PUC Minas, 130f. Dissertação (Mestrado – Engenharia Mecânica).
- Reitz R.D., Duraisamy, G., 2015. Review of high efficiency and clean reactivity controlled compression ignition (RCCI) combustion in internal combustion engines. Progress in Energy and Combustion Science, v. 45, p. 12-71, 2015.
- Tomanik, E., 2000. Modelagem do desgaste por deslizamento em aneis de pistão em motores de combustão interna. USP, 230f. Tese de doutorado (Doutorado – Engenharia Mecânica)
- Youmans, W., Popular Science Monthly, 1881. 27 Jul. 2019. Disponível em <<https://archive.org/details/popularsciencemo18newy/page/n7>>.

## 6. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.