

CONTROLE DE VIBRAÇÕES DE UMA ESTRUTURA FLEXIVEL

Amanda Alves de Souza

Sanderson Manoel da Conceição

Universidade Federal da Grande Dourados, Rod. Dourados-Itahum, Km 12 - Cidade Universitaria, Dourados - MS, 79804-970
amandasouzaah08@gmail.com – sandersonconceicao@ufgd.edu.br

Resumo. Este trabalho tem como objetivo de projetar um controlador para uma estrutura flexível. Inicialmente é feita uma apresentação de elementos da teoria de controle, a modelagem de uma viga através do método de elementos finitos e por último uma simulação numérica para o controle de vibrações utilizando a alocação de polos. O controlador mostrou se eficaz para reduzir as vibrações da estrutura quando a mesma estava sujeita a uma força.

Palavras chave: Modelagem matemática. Realimentação de estados. Controle de vibrações.

1. INTRODUÇÃO

O projeto de controladores é uma área com inúmeras aplicabilidades, desde equipamentos na área da saúde aos mais evoluídos equipamentos aeroespaciais. No corpo humano, como exemplo, o pâncreas age como um controlador regulando o nível de açúcar no sangue. Assim, um controlador é definido como um mecanismo que age para controlar ou regular um determinado sistema.

Entre as técnicas de controle, o controle PID (Proporcional integral derivativo) é uma das técnicas mais utilizadas nas indústrias. Este tipo de controlador é utilizado em um sistema com uma entrada e uma saída. Para sistemas mais complexos, controladores via realimentação de estados são recomendados, como por exemplo o regulador quadrático linear, LQR, e o controle por alocação de polos, o qual nos propicia na escolha da posição dos polos, sendo assim muito eficaz, porém com maior gasto de energia comparado com o LQR, (NISE (2002)).

Em termos de modelagem de estruturas há diversas formas de se analisar, como a modelagem analítica, que se trata de uma descrição matemática que define um determinado sistema, com a utilização das leis de Newton ou métodos de energia. Uma outra forma é a metodologia numérica, como por exemplo, o método de elementos finitos, que divide o sistema em várias partes de modo a analisar seu comportamento, isto pode ser analisado no livro de KATTAN (2010).

Este trabalho tem como objetivo realizar a modelagem matemática de uma viga engastada e aplicar um controlador que se baseia na realocação de seus polos. Toda a modelagem por elementos finitos e o projeto do controlador foi feita através de simulação computacional com o software livre Scilab.

2. ELEMENTOS DA TEORIA DE CONTROLE

2.1. Influência dos polos na estabilidade de um sistema

Como dito por OGATA (2010), a estabilidade é uma das características mais importantes do sistema a qual denota se um sistema de controle está em equilíbrio, caso em ausência de qualquer sinal, a saída permaneça no mesmo estado. Em contrapartida, caso haja divergência na saída sem limites a partir de seu estado de equilíbrio demonstra um sistema instável.

Os polos de um sistema denotam sua estabilidade de forma indireta, um polo pode ser representado pela Eq. (1), onde σ mostra a parte real e ω a parte complexa. A parte real do sistema quando for negativa denota um sistema estável, devido a sua resposta temporal, Eq. (2), se comportando como uma exponencial negativa, a qual fará o sistema tender a zero, inversamente a isto, quando a parte real for positiva a parte exponencial tenderá a crescer de maneira infinita. Já a parte imaginária é uma indicação do quão oscilatório é o sistema, devido a parte senoidal contida na Eq. (2). Maiores informações sobre estas formulações podem ser encontradas em OGATA (2010).

$$s = \sigma \pm \omega j \quad (1)$$

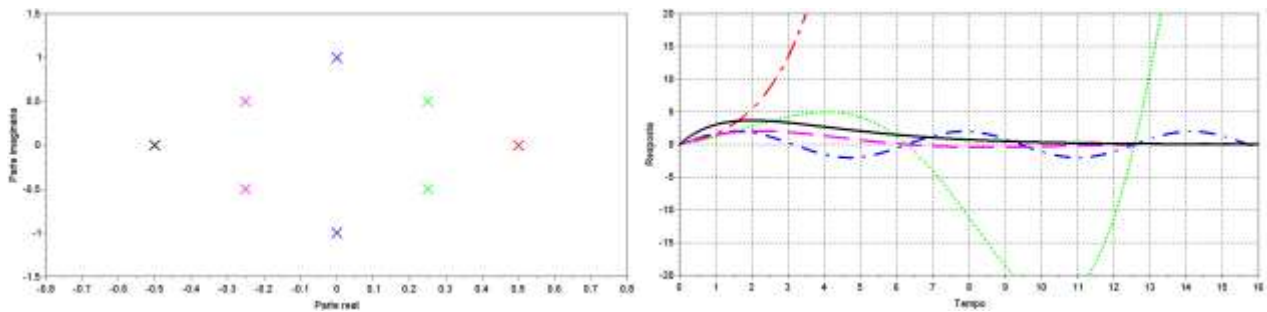
$$x(t) = a + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) \quad (2)$$

Sendo p_j os polos do sistema, ζ_k a razão de amortecimento, ω_k as frequências naturais, a , a_j , b_k e c_k constantes relacionadas as condições iniciais.

O autor RAO (2009) demonstra em seu livro com detalhes as propriedades da Eq. (2). Em resumo, esta equação demonstra a curva de resposta de um sistema de ordem superior, o qual se trata da soma de uma série de curvas exponenciais e senoidais amortecidas. Caso seja considerado os polos predominantemente no lado esquerdo do plano complexo e no eixo real, os termos exponenciais e exponenciais amortecidos tenderão a zero na medida em que t aumenta, considerando a saída no regime permanente $c(\infty) = a$.

Para melhor visualização da resposta vinculada aos polos, foram escolhidos alguns polos que demonstraram os tipos de respostas possíveis para um sistema genérico, no qual irá somente variar a sua grandeza. A Fig. (1.a) demonstra a posição escolhida para os polos, e a Fig. (1.b) demonstra a resposta equivalente a cada polo escolhido. Os gráficos foram criados com auxílio do *software* gratuito *Scilab*.

Figura 1a. Posicionamento dos polos e 1b. Resposta temporal (Autoria Própria)



Como se pode observar a parte imaginária na Eq. (1) faz com que a resposta temporal do sistema tenha oscilação, quando se trata de um sistema instável, a resposta oscila conforme o sistema tende a instabilidade, e para sistema estável a oscilação se mostra na parte transitória, no início da resposta até o sistema se estabilizar. Quando se trata de sistema somente com resposta oscilatória, o mesmo irá fazer com que sua resposta seja oscilatória. Para sistemas com partes reais positivas o mesmo tenderá a uma resposta infinita, e sistemas com polos reais negativos, o sistema irá se estabilizar, respeitando o fluxo da entrada aplicada.

2.2. Modelagem por espaço de estados

Considere um sistema genérico qualquer representado por uma equação diferencial de ordem n :

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u \quad (3)$$

Sendo a_1, a_2 e a_n seus parâmetros do sistema e u uma força de entrada para $t \geq 0$.

Para uma representação em espaço de estados, considere a seguinte mudança de variável:

$$x_1 = y; x_2 = \dot{y}; \dots; x_n = y^{n-1} \quad (4)$$

Substituindo as novas variáveis na Eq. (3), obtemos a seguinte relação:

$$\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = x_3; \dots; \dot{x}_{n-1} = x_n; \dot{x}_n = -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u$$

Ou na forma matricial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (5)$$

Sendo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A saída é dada por:

$$\mathbf{y} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

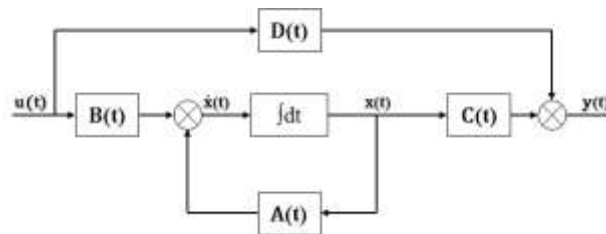
Ou:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (6)$$

A matriz \mathbf{A} denota a matriz de com os parâmetros do sistema, denominada matriz de estados ou matriz dinâmica, e seus autovalores são os polos do sistema. A matriz \mathbf{B} é a matriz de entrada, onde é aplicado uma força externa. Na equação de saída, a matriz \mathbf{C} é denominada como matriz de saída. Para algumas situações, deve se considerar na equação de saída, Eq. (6), uma matriz \mathbf{D} , ou matriz de transmissão direta, a qual se multiplica pela entrada \mathbf{u} , esta matriz irá demonstrar os ruídos ou interferências contidas no sistema. Os vetores \mathbf{x}, \mathbf{y} e \mathbf{u} são respectivamente os vetores de estado, saída e vetor de força externa.

A Fig. (2) demonstra o diagrama de blocos que representa um diagrama de blocos de um sistema com controlador:

Figura 2. Diagrama de Blocos (Adaptado de OGATA (2010))



2.3. Condições necessárias para controle de um sistema.

Um sistema pode ser controlável se houver a possibilidade por meio de um vetor de controle não limitado transferir seu sistema de um estado para outro, ou seja, que ele tenha a possibilidade de mudança do sistema. Para determinar se um sistema de ordem n pode ser controlável ou não, é necessário que a matriz de controlabilidade abaixo definida possua posto n , ou seja, que suas filas sejam linearmente independentes.

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (7)$$

2.4. Alocação de polos

Controle por alocação de polos permite que os mesmos sejam alocados para uma posição determinada com intuito de dar estabilidade ao sistema. Para isso encontra se uma matriz de ganho \mathbf{K}_c para o sistema, que ao se multiplicar a matriz de entrada, faz com que os polos sejam deslocados para posição desejada, o qual necessita que todas as variáveis de estados sejam medidas com sucesso. A Eq. (8) demonstra a equação de espaço de estados já com o ganho \mathbf{K} aplicado:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c)\mathbf{x} \quad (8)$$

A equação de resposta a este sistema é dado pela Eq. (9):

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}_c)t} \quad (9)$$

A Eq. (9) tem o mesmo significado da Eq. (2), porém é obtida através da metodologia de espaço de estados. Maiores detalhes podem ser encontrados em BISHOP (2001)

Na literatura existem diversas formas de se encontrar o ganho \mathbf{K}_c , mas o enfoque deste trabalho será através do método de substituição direta, o método se resume em definir os polos desejados e, como denota na Eq. (10), iguala-los a determinante do sistema, assim remanejando a equação pode se encontrar os valores de \mathbf{K}_c :

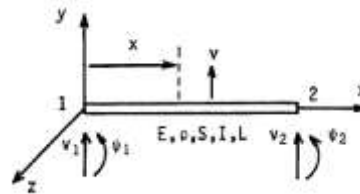
$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_c| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) \dots (s - \mu_n) \quad (10)$$

Sendo $\mathbf{K}_c = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \dots \quad k_n]$ o ganho do controlador e $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots \mu_n$ os polos nas posições desejadas. Neste trabalho foi utilizado o comando *ppol* do *software Scilab* para calcular o ganho do controlador.

3. MODELAGEM NUMÉRICA POR ELEMENTOS FINITOS

O sistema escolhido para aplicar as técnicas de controle mencionadas, foi uma viga e seu modelo foi obtido via método dos elementos finitos. Para obter o modelo por elementos finitos é necessário discretizar a viga em uma quantidade de n elementos, de modo a obter suas matrizes de massa e rigidez. Considere o elemento de viga de comprimento L da Fig. (3), a qual possui módulo de elasticidade E , densidade ρ , área da seção transversal S e momento de inércia de área I . Para o elemento de viga foi considerado dois graus de liberdade por nó, v_1, ψ_1, v_2 e ψ_2 são respectivamente ao deslocamento e rotação no primeiro e segundo nó.

Figura 3. Demonstração de um elemento de viga (LALANNE (1984))



A energia de deformação para um elemento de viga é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon^t \sigma d\tau \quad (11)$$

O deslocamento em um ponto arbitrário do elemento, d , está relacionado ao vetor de deslocamento nodal do elemento δ , através da matriz de forma \mathbf{N} , como representado na Eq. (12).

$$d = \mathbf{N}\delta \quad (12)$$

A Eq. (13) relaciona a deformação do elemento com o deslocamento nodal. A equação é obtida derivando a Eq. (12) com relação ao espaço, onde \mathbf{B} é a derivada da matriz de forma \mathbf{N} .

$$\varepsilon = \mathbf{B}\delta \quad (13)$$

Em relação a tensão aplicada inicialmente, sua relação com a deformação se dá pela Eq. (14):

$$\sigma = \mathbf{E}\varepsilon \quad (14)$$

Sendo \mathbf{E} uma matriz simétrica quadrada com as propriedades físicas do material.

Substituindo as Eq. (13) e Eq. (14) na Eq. (11) e integrando em relação ao espaço obtemos a seguinte matriz de rigidez:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

A matriz de massa é encontrada a partir da expressão da energia cinética de um elemento representado pela Eq. (16):

$$T = \frac{1}{2} \int_\tau \rho V^2 d\tau \quad (16)$$

Sendo $V = \dot{d} = \mathbf{N}\dot{\delta}$ a derivada temporal do deslocamento d .

De maneira semelhante é possível definir a matriz de massa, representada abaixo:

$$\mathbf{M} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Maiores detalhes podem ser encontrados em LALANNE (1984).

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para a modelagem da viga foram utilizados os seguintes parâmetros:

Tabela 1. Propriedades da viga:

Propriedades:	Símbolo	Unidade:
Módulo de elasticidade	E	69 GPa
Espessura	h	1 mm
Comprimento	L	50 cm
Largura	b	4 cm
Densidade	ρ	2700 kg/m ³
Inércia	I	3.333 mm ⁴
Área	A	0.4 cm ²

Foi obtido o modelo com 10 elementos e 22 graus de liberdade. Como a viga foi considerada engastada, as condições de contorno foram aplicadas e o modelo final apresentou 20 graus de liberdade. Assim com as matrizes de massa e rigidez deste modelo obtemos a seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

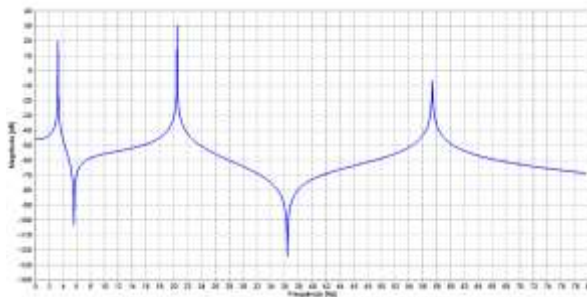
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t) \quad (18)$$

Aplicando a transformada de Laplace BISHOP (2001), é possível obter a seguinte função de transferência (FERREIRA (2008)):

$$G(\omega) = [\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]^{-1} \quad (19)$$

Resposta em frequência do sistema é mostrada abaixo:

Figura 4. Função resposta em frequências da viga (Autoria Própria)



Com as matrizes de massa e rigidez é obtida a matriz dinâmica e o vetor de entradas para o sistema através das seguintes matrizes de acordo com GAWRONSKI (2004), onde foi considerado um pequeno amortecimento:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & 0.05\mathbf{K} + 0.01\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Sendo \mathbf{A} uma matriz de dimensão 40x40, ao se fazer o teste de controlabilidade, Eq. (7), notou-se que dez estados podiam ser controláveis, assim o sistema foi reduzido para apenas 4 estados, que representam os dois primeiros modos de vibrar da viga. Assim o modelo reduzido representa as maiores amplitudes de vibração da viga. Maiores detalhes sobre a redução de modelo podem ser encontrados no GAWRONSKI (2004) e ABREU E AUTORES (2012).

No modelo reduzido, foi encontrado os seguintes polos:

$$s = -0.0512952 \pm 20.524255i$$

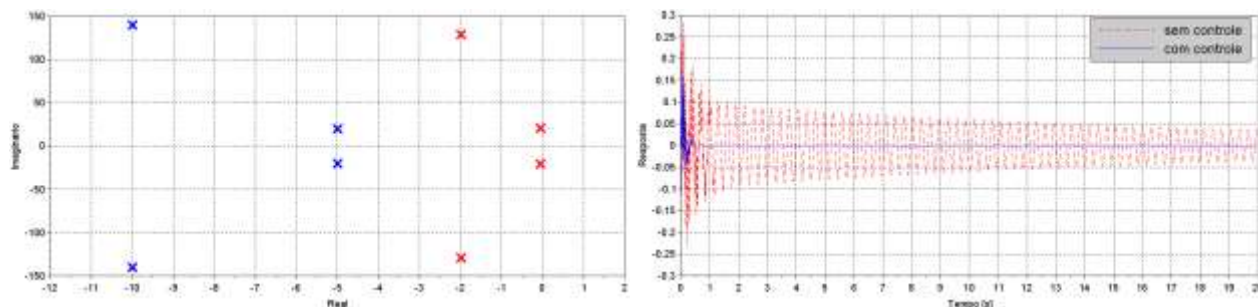
$$s = -1.9912548 \pm 128.80037i$$

Pode se perceber que o sistema é estável, porem devido a parte real baixa, o mesmo demora para se estabilizar. Foi decidido aplicar o controla para obter uma resposta mais eficaz. Os polos escolhidos foram:

$$s = -5 \pm 20i$$
$$s = -10 \pm 140i$$

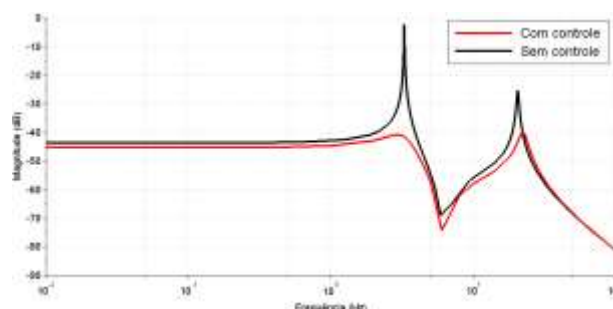
A Fig. (5.a) demonstra a posição dos polos escolhidos e os compara com a posição dos polos iniciais de **A**. A Fig. (5.b) compara a resposta temporal ao impulso do sistema com e sem controle.

Figura 5.a Comparação da posição dos polos (Autoria Própria) Figura 5.b Resposta temporal (Autoria Própria)



Como se pode perceber, a alocação dos polos fez com que o sistema se estabiliza-se de forma mais rápida, mostrando assim sua eficácia. A Fig. (6) mostra as diferenças dos picos de frequência com e sem controle, podendo ver assim nitidamente a diferença na vibração do sistema:

Figura 6. Diferença de reposta em frequência do sistema reduzido com o sistema já controlado (Autoria Própria)



5. REFERENCIAS

- ABREU, Gustavo Luiz et al. System identification and active vibration control of a flexible structure. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, v. 34, n. SPE, p. 386-392, 2012.
- BISHOP, Robert H.; DORF, R. Sistemas de controle modernos. Livros Técnicos e Científicos, 2001.
- ESI Group. **Scilab**. Disponível em: <https://www.scilab.org/>. Acesso em: 30 de junho de 2019.
- FERREIRA, António JM. **MATLAB codes for finite element analysis: solids and structures**. Springer Science & Business Media, 2008.
- GAWRONSKI, Wodek. **Advanced structural dynamics and active control of structures**. Springer Science & Business Media, 2004.
- KATTAN, Peter I. **MATLAB guide to finite elements: an interactive approach**. Springer Science & Business Media, 2010.
- LALANNE, Michel; BERTHIER, Patrick; DER HAGOPIAN, Johan. **Mechanical vibrations for engineers**. 1984.
- NISE, Norman S.; DA SILVA, Fernando Ribeiro. **Engenharia de sistemas de controle**. LTC, 2002.
- OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. Sao Paulo, SP: Pearson, 2010. 809p. Clark, J.A., 1986. *Comunicação pessoal*. University of Michigan, Ann Harbor.
- RAO, Singiresu S. **Vibrações mecânicas**. Pearson Educación, 2009.

6. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.